

## 也论数学核心素养及其构建<sup>\*</sup>

蔡金法 徐斌艳

**摘要** 本文基于如下两个假设。首先,对数学核心素养的研究需要基于人的培养目标,社会所需各级各类的未来人才的特质形成以及个人将来的生活质量,应该伴随在数学核心素养发展过程中。其次,数学核心素养的研究需要基于人们对数学的认识,人们拥有的数学观会影响对数学素养的认识。本文在阐述数学核心素养关联的人才观和数学观之后,提出并论述数学核心素养的构建,其中包括数学交流、数学建模、智能计算思维和数学情感四个核心素养成分。

**关键词** 数学核心素养; 数学交流; 数学建模; 智能计算思维; 数学情感

**作者简介** 蔡金法/美国特拉华大学数学系教授 (纽瓦克 19716)

徐斌艳/华东师范大学课程与教学研究所教授 (上海 200062)

### 一、引言

先从一个故事讲起:同事A去美发沙龙理发,交流中,女理发师B了解到A是数学教授,于是打开话匣子。B告诉A,她在小学主要操练计算策略,数学成绩尚可。但到高中,抽象的数学内容让她无所适从,最后靠操作计算器得到相应答案,勉强数学考试及格,很庆幸现在不用碰数学了。同事A听后感叹万分,因为数学是远超乎计算操作。B在学校经历的数学学习仅仅是操练计算策略或操作计算器,数学给B带来了强烈的“恐惧”。显然,尽管高中毕业,B没能拥有期望的数学素养。从表面上,她不需要什么数学素养,同样可以立足社会,谋取一个赖以生存的职业。但是,她对数学的认知,会影响她潜在才能的发挥和发展,局限她对职业的选择,或在职业上的发展。更重要的,局限了她在生活中因为数学而带来的乐趣。我们不能简单地以人们在生活中、工作中是否直接应用数学,来断定他们是否需要数学素养。就好像,不能因为不是记者或者作家,人们就不需要写作或阅读。作为一个平常人,他平常会阅读报纸、书面表达想法,需要了解即时的信息、与人交流。因此他同样需要有写作和阅读素养,否则将影响基本的生活质量。数学素养是与阅读素养相当的,每个人都应该有权拥有的。

这个故事说明,在考虑数学素养时,既要考虑人的培养目标,又要考虑数学的特质。首先,对数学核心素养的研究需要基于人的培养目标,社会所需各级各

<sup>\*</sup> 本文系“华东师范大学教育学高峰学科建设项目”资助。

类未来人才的特质形成及个人将来的生活质量应该伴随在数学核心素养发展过程中。其次,数学核心素养的研究需要基于人们对数学的认识,人们拥有的数学观会影响对数学素养的认识。如果数学只是简单的计算操作,可能论数学核心素养的必要性不大。在数学教育领域,关于数学核心素养内涵的讨论已经成为热点。尽管,目前的研究没有对数学核心素养构成及其内涵达成某种共识,但我们发现,根据人才培养的需求,根据个人的生活质量,根据数学学科特点,有些数学核心素养成分是较为公认的。本文在简要论述人的培养目标与数学认识之后,将集中探讨数学核心素养成分的建构,为今后核心素养的培养与测评打下基础。

需要说明的是,我们这里所说的素养是特指一种学生所应具有的不是那种用于高风险考试(例如,高考)、供选拔的要求。

## 二、核心素养关联的人才观与数学观

那么我们究竟要培养什么样的人呢?不妨从国际、社会、学者、教育实践和个人五个层面来探究人才特征。

联合国教科文组织(UNESCO)2016年发布《教育2030—仁川宣言与行动框架》,提出人的培养的新愿景:成为全球公民,宽容并文明地投入社会、政治、经济活动;拥有一定的技术和职业技能,获得可持续发展能力;要促进人们跨文化的对话,提升对文化、宗教、语言多样性的尊重;有度过危机、消除冲突的能力等。<sup>[1]</sup>联合国教科文组织从世界和平、和谐的角度提出对人发展的要求。

各国对人才培养有着自己的设计。中国的《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》提出教育旨在促进学生全面发展,着力提高学生服务国家服务人民的社会责任感、勇于探索的创新精神和善于解决问题的实践能力。<sup>[2]</sup>新加坡教育强调帮助学生应对快速发展的世界,提出21世纪素养模型,培养的人应该拥有自我意识、自我管理、自我决策的能力,拥有人际素养、社会性意识;因此信息沟通素养、批判与创新思维、公民素养、全球意识、跨文化素养尤为重要。<sup>[3]</sup>

进入21世纪以来,各种创新的职业和工作模式层出不穷,新技术使人类进入了信息传播的全球化时代。研究者们从不同角度,对信息时代的教育提出新要求,其中,托马斯·弗里德曼(Thomas L. Friedman)的观点得到广泛关注。他从教育角度给出把孩子们培养成为平坦世界上不会被淘汰的中产阶级所需要的五种技能和态度:一是培养“学习如何学习”的能力;二是掌握网上冲浪的技巧,学会甄别网络上的噪声、垃圾和谎言,发现网络上的智慧和知识的来源;三是学会自我激励,保持学习激情和强烈的好奇心;四是学会横向思维,在不同领域寻找彼此间的联系,发展综合能力;五是培养艺术才能,学会换位思考、统筹安排、解决新挑战、追求卓越。<sup>[4]</sup>

作为学校教育实践者的一线教师也从自身鲜活的教育实践出发,提出在数学教学中要培养学生思维独创性、深刻性与灵活性,养成独立思考等习惯。<sup>[5]</sup>爱

因斯坦在谈到学校人才培养目标时也曾经指出：“学生离开学校时是一个和谐的人，而不是一个专家……被放在首要位置的永远应该是独立思考和判断的综合能力的培养，而不是获取特定的知识。如果一个人掌握了他的学科的基本原理，并学会了如何独立地思考和工作，他将肯定会找到属于他的道路。”<sup>[6]</sup>

上述人才培养目标，为我们描绘出教育应该承担起的责任蓝图。作为学校核心学科的数学自然应该围绕这些宏观目标发挥育人功能，为数学素养的构建提供方向。例如，数学教育可以促使学生思维独创性和灵活性的发展，这就有助于在危机和冲突中寻找解决途径，从而个人更能享受人生。

在构建数学核心素养过程中，还需要关注人们的数学观。数学是什么？这是一个有着丰富答案的问题，无法展开论述。美国数学家和数学哲学家 M·克莱因指出，“数学本身就是一个充满活力的繁荣的文化分支。经过几千年的发展，数学已经成为一个宏大的思想体系，每个受过教育的人都应该熟悉其基本特征。”<sup>[7]</sup> 尽管数学发生在人类的思想思维中，但人们也努力在数学和他能用感官感受的现实之间建立联系，也就是说，人们用“数学的眼睛”看现实。数学也可以应用在非数学领域，用于解决问题。进化论先驱 C·达尔文曾经对自己在数学上没有足够造诣而深感遗憾，致使他无法理解和享受那些伟大的、引领人类发展的数学原理。<sup>[8]</sup> 数学发展也证实了数学对其他领域发展的贡献。数学让人们获得一种深层次思考和理解现实的新的方法。

数学对人类的生活有重要意义。可惜人们对数学的认识往往是不完整的，有人认为数学是计算工具，用来计算长度与面积，或算出成本与利润；有人认为数学是物理和生理宇宙中的创世语言；有人则认为数学是很好的分析方法。<sup>[9]</sup> 树立完整的数学观，对我们认识数学核心素养内涵显得尤为重要。数学素养应该是人的一种思维习惯，能够主动、自然、娴熟地用数学进行交流、建立模型解决问题；能够启动智能计算的思维，拥有积极数学情感，做一个会表述、有思想的、和谐的人。也就是说数学素养至少包含着数学交流、数学建模、智能计算、数学情感等四个方面。下面我们将阐述这四个何以构成数学核心素养的主要成分。

### 三、数学核心素养成分构成模型

“核心素养是从‘学习结果界定未来人才形象’的类概念。”<sup>[10]</sup> 尽管对核心素养具体内涵的表述非常丰富，但它们应该围绕人才观、课程观、学科观等展开。如经济合作与发展组织(OECD)发起的国际学生评价项目(PISA)较早提出数学素养概念，从数学教育角度刻画出未来公民的形象。它将数学素养界定为“一种个人能力，包括能够识别并理解数学在世界中起的作用，做出有理有据的数学判断，作为一个积极、热心、反思的公民会使用数学并参与其中，以满足个人生活的需要。”<sup>[11]</sup> 牛津学习中心曾经发布什么是数学素养、何时会拥有数学素养、数学素养发展面临怎样的挑战等。该中心提出，数学素养包括解决真实世界问题、推理和分析信息的能力；是一种理解数学“语言”的能力。<sup>[12]</sup> 数学素养是除语言

素养外的第二个关键素养,对于学生通过理解专业术语而读懂问题尤为重要。

关于数学素养内涵的研究,国内学者纷纷提出各自的观点。有的研究提出数学核心素养为学生学习数学应当达成的有特定意义的综合性能力,它基于数学知识技能,又高于具体的数学知识技能,反映数学本质与数学思想,是在数学学习过程中形成的。<sup>[13]</sup>也有研究认为,数学核心素养是数学情感态度价值观、数学知识、数学能力的综合体现。<sup>[14]</sup>有研究强调学科核心素养是指学科的思维品质和关键能力,数学学科主要培养演绎和归纳的逻辑思维,培养相应的演绎和归纳的推理能力。<sup>[15]</sup>国外一些研究则关注数学素养的具体成分,提出数学核心素养具有情景性,具体包括数学思维能力、表征能力、符号和形式化能力、交流能力、建模能力、拟题与解题(数学题处理)能力等。<sup>[16]</sup>其他国际学者则更加重视对具体的数学素养成分的研究,其中出现频率较高的为数学问题提出、数学问题解决和数学交流。

综观国内外人才培养目标,对于信息交流素养、问题解决素养、创新实践素养等特别关注。从数学学科角度看,数学交流、数学建模、数学智能计算思维(computational thinking (technology related))、数学情感(mathematical disposition)能刻画出满足培养目标的人才所拥有的素养。

我们提出这四个核心素养成分,不在于追求对数学素养认识的完整性,但是这四个核心素养成分体现了现代教育人才培养目标的需求,体现了数学的本质认识。另外我们提出数学核心素养是可测试和培养的,它应该是在相关数学内容的学习与探究过程中养成的。因此核心素养成分的培育离不开数学内容土壤。下面对这四个成分逐一进行分析,论证这个核心素养模型如何反映人才观和数学观。

## 四、数学核心素养成分

### (一) 数学交流

随着科学技术发展,数学广泛地渗透在社会的方方面面。作为未来公民的学生需要具备一定的数学交流素养。数学交流是学生学习数学的一种方式,同时也是应用数学的途径之一。学生在交流中学习数学语言,并运用数学语言中特定的符号、词汇、句法去交流,去认识世界,从而逐渐获得常识的积累。

美国1989年颁布的《美国学校数学课程和评价标准》较早提出数学交流标准,对学生交流素养做出相关界定:通过交流组织和巩固他们的数学思维;清楚连贯地与同伴、教师或其他人交流他们的数学思维;分析和评价他人的数学思维和策略;用数学语言精确地表达数学观点。<sup>[17]</sup>我国2012年颁布的《义务教育数学课程标准(2011年版)》也突出了关于“数学交流能力”的目标。它明确将“学会与他人合作交流”作为数学课程总目标之一,要求学生通过经历与他人合作交流解决问题的过程,学会倾听和理解他人的思考方法和结论,清晰表达和解释自己的思考过程与结果,并尝试对别人的想法提出建议,对他人提出的问题进行

反思,初步形成评价与反思的意识。<sup>[18]</sup>

数学交流包括用数学语言与他人和自我的互动过程。“与他人互动”强调一方面会阅读并理解数学事实,能理解他人以各种表征呈现的有数学意义的文本,包括书面的、视觉化的或口头形式;另一方面以书面或口头形式评述他人数学思维和策略。“与自我互动”意指以书面的、视觉化的或口头形式等,表达自己的思维过程、数学见解,反思、精炼、修正自我数学观点。数学交流素养包含数学推理论证、数学表征等数学关键能力。特别地,数学推理论证是用特殊的语言表达数学结论观念。

## (二) 数学建模

进入 21 世纪,各国与各地区启动的数学课程改革都将学生数学建模思想的形成以及数学建模能力的培养作为数学教育的重要目标之一。2003 年颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》突出了“培养数学建模能力”的重要性,“数学建模”作为新增的三个课程内容(数学探究、数学建模、数学文化)之一,要求渗透在整个高中课程的内容中。《义务教育阶段数学课程标准(2011 年版)》也强调要重视学生已有的经验,使学生体验从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题的过程。<sup>[19]</sup> 2003 年颁布的德国数学教育标准也明确提出数学建模能力,要求学生学会用数学方法去理解现实相关的情景,提出解决方案,并认清和判断现实中的数学问题。<sup>[20]</sup>

随着研究的深入,对数学建模及其能力的界定越来越充分。数学建模能力被认为是“能够在给出的现实世界中识别问题、变量或者提出假设,然后将它们翻译成数学问题加以解决,紧接着联系现实问题解释和检验数学问题解答的有效性。<sup>[21]</sup>”在此强调数学建模是建立真实世界与数学世界之间可逆的联系,关注抽象出数学问题与解决现实问题的过程。数学建模不是线性过程,需要不断地从数学世界返回真实世界中检验结果,完善模型。

随着研究的深入,人们提出在现实问题情境和现实模型之间加入情境模型,即建模者要先理解现实情境,头脑中对情境有一个表征,然后再简化和建构,得到现实模型,在此基础上形成一个由 7 个环节构成的循环模型(见图 1)。<sup>[22]</sup>

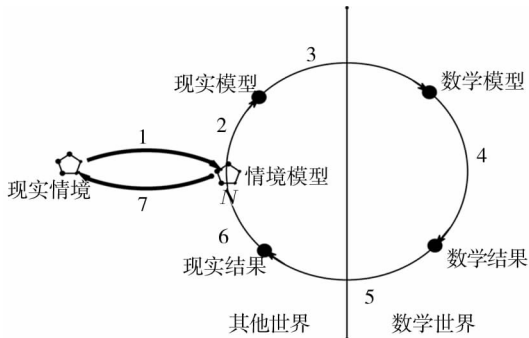


图 1 数学建模循环模型

根据这个数学建模循环模型,建模过程包含 6 个状态和 7 个环节。这里所

说的状态是指建模问题所处的原始状态或经过某个环节转换之后获得的结果,而环节是指建模者从一个状态到下一个状态所采取的操作行为。数学建模素养具体体现在这七个操作行为中,包括理解现实问题情境(理解);简化或结构化现实情景,形成现实模型(简化);将被结构化的现实模型翻译为数学问题,形成数学模型(数学化);用数学方法解决所提出的数学问题,获得数学解答(数学求解);根据具体的现实情景解读并检验数学解答,获得现实结果(解释和转译);检验现实结果的有效性(检验);反馈给现实情景(反馈)。数学建模素养与数学地提出问题、解决问题的核心能力密切相关,因为数学建模的重要一步是提出有价值的研究问题,从而用数学去认识现实。<sup>[23-24]</sup>

### (三) 智能计算思维

这个素养在别的研究者中不常提到,因此我们用较长一点的篇幅来讨论。21世纪是知识与信息技术高速发展的时代,随着数字化进程的不断推进,社会信息化程度进一步提高,智能计算思维的应用越来越广泛,必须像“阅读、写作、算术”一样普及,成为每个合格公民的必备素质。<sup>[25]</sup>

智能计算思维被界定为一种运用计算机科学基本概念解决问题、设计系统以及理解人类行为的方式方法。<sup>[26]</sup>它代表一种每个人都应该有的应用态度和技能,而不是计算机专家独享的思维。

智能计算思维首先与计算机教育密切相关。2011年美国国际教育技术协会(International Society for Technology in Education,简称ISTE)与计算机科学教师协会(Computer Science Teachers Association,简称CSTA)基于计算思维特征,给出操作性定义:智能计算思维是一种问题解决过程,它强调用有助于求解的计算机或其他工具表述问题;逻辑组织并分析数据;用模型与模拟等抽象表征数据;通过算法思维将求解过程自动化;识别、分析并实施可能的求解过程,以便获得步骤和资源最有效率和效益的组合;将问题解决过程概括并转换为更为一般的问题解决过程。<sup>[27]</sup>从这一描述性的定义可以看出智能思维与数学的密切关系。

由于新兴学科不断发展,让智能计算思维走进了数学教育。近20年来,每个数学相关领域中,智能计算不断发展,如生物信息学、计算统计学、化学计量学、神经信息学等,在这些学科交叉领域,智能计算尤为重要。数学教育应重视日益发展的智能计算思维以及相应的技能技巧,为学生接触并了解这些新兴交叉领域创设学习环境,帮助学生更好地适应知识和信息技术快速发展的社会。

我国《义务教育阶段数学课程标准(2011年版)》明确提出,数学与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值,推动着社会生产力的发展;在数学课程中,要注重发展学生的数据分析观念、运算能力、模型思想等,以适应时代发展对人才培养的需要。<sup>[28]</sup>即将颁布的普通高中数学课程标准提出,要重视学生数学抽象、数学运算、数据分析等数学核心素养的形成和发展。

魏茵托普(David Weintrop)等研究者通过大量的文献分析、专家访谈、数学课堂教学观察及其编码分析,提出数学教育中的智能计算思维要素分类,它包括

数据实践; 建立模型与模拟实践; 智能计算问题解决实践; 系统思维实践等四个要素, 并且对每个思维要素分类进行界定( 见表 1)。<sup>[29]</sup>

表 1 数学教育中智能计算思维的要素分类

数据实践 Data Practices	建立模型与模拟实验 Modeling & Simulation Practices	智能计算问题解决实践 Computational Problem Solving Practices	系统思维实践 Systems Thinking Practices
收集数据	使用计算模型理解概念	为求解问题做准备	整体考察复杂系统
构造数据	找出和检验解答	会计算机编程	理解系统内部的关系
操作数据	评价计算模型	选择有效的计算工具	分层思维
分析数据	设计计算模型	评价问题求解过程	交流系统的信息
数据可视化	构造计算模型	开发求解模块 生成计算抽象	定义系统和管理复杂性
		解决疑难, 排出故障	

智能计算思维特别强调系统思维这一要素, “系统思维的能力是一种重要的思维习惯……它为下一代成为科学公民做准备。在全球社会下, 需要做出大规模的科学的决定, 对下一代来说, 发展对世界的系统思维尤为重要。”<sup>[30]</sup> 面对现代社会对人才的需要、数学学科发展优势, 我们提出将智能计算思维作为数学核心素养主要成分之一。

在数学教育领域, 智能计算思维包括数据实践、数学模拟、基于计算机的问题解决、系统思维等四方面的能力。

数据实践是指收集数据、构造数据、操作数据、分析数据和将数据可视化等技能。这些技能主要表现为会计划收集数据的系统方案, 借助智能计算工具使得数据收集等成为自动化过程。另外, 能够以各种方法将数据可视化, 包括利用传统的图表工具表征数据, 或者用各种可视化软件表征数据, 以便使用者能够与所显示的数据进行互动。

数学模拟的实践是指使用数学模型理解概念的技能, 找出模型求解方法并加以检验的技能, 评价并优化模型的技能。它主要表现为针对复杂问题情境( 更多是其他学科领域或现实情境的问题) 会构造、使用、优化模型, 模型可以包括流程图、示意图、方程、计算机模拟或者物理模型等。模型是对现象的简化, 突出现象的本质特征。数学模拟的经历有助于学生对现象本质的理解。

基于计算机的问题解决是指会根据问题解决策略, 将问题分解为已知问题; 会进行简单的计算机编程; 能够辨别不同计算工具的利弊, 选择有效的计算工具, 评价问题求解过程; 在处理复杂问题时, 会将问题模块化, 利用计算机开发简单的、可重复使用的解答模块; 当计算机运行模块碰到故障时, 会做出相应的处理。

系统思维的实践是指从整体考察复杂系统, 理解系统内部关系; 会分层思维, 交流系统的相关信息。它主要体现为能够针对收集的系統数据( 城市交通问题, 养老金政策问题) 从整体上提出问题, 设计并实施对数据的研究方案, 且能够对过程及结果加以解释等。另外, 还能够识别构成系统的要素, 领会并解释

当系统的特征性行为产生时,系统要素互动的方式。学生能够识别所给系统的不同层面,了解清楚每个层面上的行为,正确刻画相关层面上的系统特征。系统思维有助于培养学生看待事物的整体观和全局观。

这是一个面向未来社会的数学素养,其形成与发展不仅与数学学科内容的学习密切相关,也是一个需要跨学科内容支持的素养。

#### (四) 数学情感

数学素养是现代社会每个公民应该具备的基本素养,它不仅包括认知层面的数学能力,也包括非认知层面的情感与态度。蔡和梅琳娜(Cai & Merlino)关于数学情感的测评研究强调,积极数学情感有助于学生更从容地迎接数学问题的挑战、更专注于数学活动,从而有助于数学成就的提高。<sup>[31]</sup>早在美国1989年的课程标准中,提出的五个数学教育的新目标,前两个就是情感方面的。积极数学情感与优良数学成就之间形成一个良性循环。那么如何理解数学情感这个概念,目前的研究没有给出明确的定义,更多是对数学情感内涵加以描述。数学情感是人们以数学和数学活动为客观感受对象的一种情感,是对数学和数学活动所持态度的体验,是数学和数学活动是否符合自身精神需要和价值观念的自我感受、内心体验。<sup>[32]</sup>

纵观历史上数学家的成长与贡献,都是伴随着积极的数学情感。出生于公元四世纪古埃及的女数学家希帕蒂娅(Hypatia)在专注于数学研究的同时,深情地表露自己的情感,“当你对数学着迷时,就会感觉到美丽、简洁的数学结构亦如艺术作品中明晰而欢畅的线条,它的哲学思辨的能力亦如音乐作品感人肺腑的旋律,久久地在胸中萦绕、升华。”<sup>[33]</sup>在深奥、抽象的研究中,庞加莱似乎更多是享受,他这样描述自己的感受“数学家首先会从他们的研究中体会到类似于绘画和音乐那样的乐趣;他们赞赏数和形的美妙的和谐;当一种新的发现揭示出意外的前景,他们会感到欢欣鼓舞……”。<sup>[34]</sup>陈省身曾经谦和地谈论自己从事数学研究的观点,“我只是想懂得数学。如果一个人的目的是名利,数学不是一条捷径……长期钻研数学是一件辛苦的事。何以有人愿这样做,有很多原因。对我来说,主要是这种活动给我满足。”<sup>[35]</sup>数学家有着各自的积极的数学情感,由此也进一步激励他们在数学这一职业生涯上发展。很难想象一个人有较高的数学素养,但恨数学。

当然,学习数学未必必要成为数学家,学习数学也并不意味着今后要直接应用数学。数学学习更多是要培养和谐的、有思想的、有责任心的人。作为一个“和谐”的人,其心理表现与积极数学情感的具体表现是相吻合的。数学情感素养是指这种积极数学情感的表现,包括对数学知识的认同感、信任感和审美能力;在数学学习中的好奇心、求知欲和喜悦感;对从事数学活动者的亲近感。

## 五、小结

根据教育的人才培养目标以及数学学科的本质特征,数学交流、数学建模、



智能计算思维和数学情感无疑是数学核心素养的重要成分。数学交流素养包含数学推理论证、数学表征等数学关键能力；数学建模素养与数学地提出问题、解决问题能力密切相关；智能计算思维则是一种系统的问题解决过程。而在强调数学素养认知成分的同时，非认知因素尤为重要；数学知识的认同感、信任感和审美能力，这些积极的数学情感有助于数学核心素养的发展。本文对数学核心素养的构建与其他关于数学核心素养的研究相辅相成。紧接着数学核心素养构建过程中需要重点考虑的是，如何测评了解学生数学核心素养之表现，如何在学校教育中发展核心素养，如何让数学教育在人才培养目标达成中发挥作用，这些是我们持续研究的方向。

#### 参考文献：

- [1] UNESCO. Education 2030. Incheon Declaration and Framework for Action. Towards Inclusive and Equitable Quality Education and Lifelong Learning for All [R]. Paris: UNESCO 2016.
- [2] 中华人民共和国教育部. 国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010-2020年) [EB/OL]. [http://www.moe.gov.cn/srsite/A01/s7048/201007/t20100729\\_171904.html](http://www.moe.gov.cn/srsite/A01/s7048/201007/t20100729_171904.html) 2016-09-19/2016-09-22.
- [3] Ministry of Education Singapore. 21<sup>st</sup> Century Competencies [EB/OL]. <https://www.moe.gov.sg/education/education-system/21st-century-competencies> 2016-09-19/2016-09-22.
- [4] [美]托马斯·弗里德曼. 世界是平的-21世纪简史[M]. 何帆,等译. 长沙湖南科学技术出版社 2009.
- [5] 蔡金法, 聂必凯, 许世红. 做探究型教师[M]. 北京: 北京师范大学出版社 2015.
- [6] [美] 阿尔伯特·爱因斯坦. 爱因斯坦晚年文集[M]. 方在庆,等译. 海南: 海南出版社 2014: 32.
- [7] [美] M·克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵,译. 上海: 复旦大学出版社 2005: 452.
- [8] The Nobel Prize in Physics Is Really a Nobel Prize in Math [EB/OL]. <http://www.theatlantic.com/technology/archive/2013/10/the-nobel-prize-in-physics-is-really-a-nobel-prize-in-math/280430/> 2016-09-19/2016-09-22.
- [9] [美]斯坦. 干嘛学数学? [M]. 叶伟文,译. 台湾: 天下远见出版股份有限公司 2002: 4.
- [10] 崔允漷. 追问“核心素养” [J]. 全球教育展望 2016(5): 3-10.
- [11] OECD. PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science [R]. Paris: OECD Publishing. 2010.
- [12] Oxford Learning. What Does Math Literacy Mean? [EB/OL] <http://www.oxfordlearning.com/what-does-math-literacy-mean/> 2010-05-05/2016-09-22.
- [13] 马云鹏. 关于数学核心素养的几个问题[J]. 课程·教材·教法 2015(9): 36-39.
- [14] 桂德怀, 徐斌艳. 数学素养内涵之探析[J]. 数学教育学报 2008, 17(5): 22-24.
- [15] 史宁中. 推进基于学科核心素养的教学改革[J]. 中小学管理 2016(2): 19-21.
- [16] Turner, R. Exploring Mathematical Competencies [J]. Research Developments 2011 24, Article. 5.
- [17] 全美数学教师理事会. 美国学校数学课程与评价标准 [M]. 人民教育出版社数学室,译. 北京: 人民教育出版社, 1994.
- [18] [19] [28] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社 2012: 9-15 # 3-5.
- [20] 徐斌艳. 关于德国数学教育标准中的数学能力模型[J]. 课程·教材·教法 2007(9): 84-87.
- [21] Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W. & Niss, M. Modelling and Applications in Mathematics Education [M]. The 14<sup>th</sup> ICMI Study. Springer 2007: 12.

- [22] Blum ,W. Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht [A]. Humenberger et al. Festschrift fuer HWH [C]. Hildesheim: Franzbecker 2007: 8 – 23.
- [23] Cai J. ,Cirillo M. ,Pelesko J. A. ,Borromeo Ferri R. ,Borba M. ,Geiger V. ,Stillman G. ,English L. D. ,Wake G. ,Kaiser G. & Kwon O. Mathematical Modeling in School Education: Mathematical ,Cognitive , Curricular ,Instructional ,and Teacher Education Perspectives [A]. S. P. Liljedahl C. O. Nicol S. Oesterle & D. Allan. The Proceedings of the Joint Meeting of the 38<sup>th</sup> International Group and the 36<sup>th</sup> North America Chapter for the Psychology of Mathematics Education ( Vol. 1) [C] . Vancouver ,British Columbia ,Canada: PME 2014: 145 – 172.
- [24] Cai J. ,Moyer J. C. ,Wang ,N. ,Hwang ,S. ,Nie ,B. & Garber ,T. Mathematical Problem Posing as a Measure of Curricular Effect on Students’ Learning [J]. Educational Studies in Mathematics 2013 83( 1) : 57 – 69.
- [25] 任友群 隋丰蔚 李锋. 数字土著何以可能一也谈计算思维进入中小学信息技术教育的必要性和可能性[J]. 中国电化教育 2016( 1) : 2 – 8.
- [26] Wing J. M. Computational Thinking [J]. Communication of the ACM ,2006 49( 33) : 33 – 34.
- [27] ISTE & CSTA. Operational Definition of Computational Thinking for K-12 Education [EB/OL]. [http: // csta. acm. org/Curriculum/sub/CurrFiles/CompThinkingFlyer. pdf](http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/CompThinkingFlyer.pdf) 2016 – 07 – 28/2016 – 09 – 16.
- [29] Weintrop D. etc. Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms [J]. Journal of Science Education & Technology 2015( 25) : 127 – 147.
- [30] Duschl RA & Bismack AS. Standards for Science Education: Quantitative Reasoning and Modeling Concepts [A]. Duschl RA ,Bismak AS. Reconceptualizing STEM Education: The Central Role of Practices [C]. Laramie: University of Wyoming 2013: 120.
- [31] Cai J. & Merlino ,F. J. Metaphor: A Powerful Means for Assessing Students’ Mathematical Disposition [A]. D. J. Brahier & W. Speer. Motivation and Disposition: Pathways to Learning Mathematics [C]. National Council of Teachers of Mathematics 2011 Yearbook. Reston: NCTM. 147 – 156.
- [32] 刘新求 等. “数学情感”的内涵分析和合理定位[J]. 太原教育学院学报 2005( 9) : 21 – 24.
- [33] 徐品方. 女数学家传奇 [M]. 北京: 科学出版社 2005: 15.
- [34] [英]G. H. 哈代. 一个数学家的辩白 [M]. 李文林 等 译. 南京: 江苏教育出版社 ,1996: 4.
- [35] 张奠宙. 20 世纪数学经纬 [M]. 上海: 华东师范大学出版社 2002: 220.

## On the Core Components of Mathematical Literacy

CAI Jinfan & XU Binyan

( Department of Mathematical Sciences ,University of Delaware ,Newark ,19716 ,USA;  
Institute of Curriculum and Instruction ,East China Normal University ,Shanghai 200062 ,China)

**Abstract:** Based on two underlying assumptions ,we discuss the core components of mathematical literacy. The first assumption is that the discussion of the core components of mathematical literacy needs to consider educational goals. The second assumption is that the discussion of the core components of mathematical literacy needs to consider the nature and process of mathematics. We argue for the necessity of four core components of mathematical literacy: mathematical communication , mathematical modeling , computational thinking , and mathematical disposition.

**Key words:** mathematical literacy; mathematical communication; mathematical modeling; computational thinking; mathematical disposition

( 责任校对: 邵 丽)