

# 构建促进学生空间观念发展的几何课程

## ——基于小学生空间观念发展水平的研究

刘晓玫

(首都师范大学 首都基础教育发展研究院, 北京 100048)

**摘要:**课程改革中小学几何课程目标与内容的变化要求我们对小学生空间观念发展的水平和规律进行研究。从课程的角度出发设计和编制测试卷是本研究的基础, 对500多名小学生进行测试并分析其结果后发现, 二、三年级学生和四、五、六年级学生的空间观念发展水平分属两个不同的阶段, 在不同的测试内容中他们分别达到不同的水平; 同时还发现与概念有关的任务一般要到四年级才可以较好地完成。所得结果及建议可为课程改革和实施提供实证研究的基础。

**关键词:**几何课程; 空间观念; 发展水平; 小学生

**中图分类号:**G623.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-0186(2008)10-0043-06

### 一、问题的提出

长期以来, 中小学几何课程的目标与内容一直是数学教育界关注和争论的焦点, 世界各国几何课程的目标要求和具体的实施不仅差距较大而且内容也显得很薄弱。几何教育的状况引起了各国数学家和数学教育工作者的重视和思考, 国际数学教育委员会也在1998年出版的几何教育的专辑中明确提出了复兴几何教学的口号。<sup>[1]</sup>

上个世纪以来我国小学几何课程的目标与内容经历了从无到有、从内容单一到越来越丰富的过程。在1956—1986年间, 除了关于图形的初步知识和测量外, 小学几何课程还提出了发展空间观念的目标, 但直至1988年, 教学大纲才对空间观念作了初步诠释, 而课程内容却一直只有图形的认识和测量的要求, 而几乎没有关于空间观念目标的体现。<sup>[2]</sup>此次课程改革中, 小学几何

课程明确了依托图形的认识、图形与变换、测量以及图形与坐标等内容, 实现认识图形的形状、大小、位置关系和变化并建立空间观念的目标。<sup>[3]</sup>这不仅大大地拓广了几何的学习领域, 而且从内容设置上为学生空间观念的发展提供了保障。

然而, 课程的构建是一个长期的过程, 对于变化较大的小学几何课程的内容与要求, 还需要在对学认知特点的研究及教学实践的基础上, 不断丰富和完善课程内容体系。以往对学生空间能力的相关研究中, 其出发点和角度更多的是心理学所关心的, 研究的结论也多局限在某些点上<sup>[4][5][6]</sup>, 这些研究及其结果虽然对课程编制和实施有一定的参考作用, 但仍缺少从课程角度出发的较为全面的系统的研究。因此, 本研究希望能基于课程来分析小学生空间观念的发展规律和特点, 并对小学阶段几何课程中相关内容的设计提出意见和建议。

收稿日期: 2008-06-27

作者简介: 刘晓玫(1962—), 女, 辽宁沈阳人, 首都师范大学基础教育发展研究院副教授, 博士, 主要从事数学课程与教学论和教师教育的研究。

## 二、研究的设计和方法

### (一) 测试卷的设计与编制

测试题目的设计主要有两个方面的考虑,一是空间观念的基本成分或要素,它主要决定了测试题目的内容;二是空间观念的发展水平,它主要决定了测试题目的类型与难度。

关于空间观念成分与要素的考虑。我们主要从心理学研究的角度和数学学科及数学课程的角度出发将测试的范围和内容确定在图形的变换(包括轴对称、旋转)、视图、方向与位置(以下简称方位)这样几个方面。

关于空间观念发展水平的考虑。综合已有的对学生思维水平和几何能力或空间能力发展水平的研究<sup>[7][8]</sup>,本研究将小学生的空间观念的发展划分为如下的三个水平(样题见附录)。

水平1:(完全)直观想象阶段。此水平所要完成的任务的特点是以直观为主、基于经验、纯粹的想象,观察分析的是单一的对象。

水平2:直观想象与简单分析抽象阶段。完成此水平的任务时,除直观想象外,还需要进行一些简单的分析、抽象,或进行基本的推理,观察分析的对象及想象的过程要更复杂一些。

水平3:想象、推理分析阶段。在完成此水平的任务时,分析、抽象和推理是在想象基础上所必需的,或者观察分析的对象更为复杂(即经历较为复杂的心理表象形成和心理操作过程)。

### (二) 确定样本与测试

在正式测试前,我们对此试卷进行了试测。正式的测试在北京市的两所城区小学和一所郊区小学中进行。分别随机抽取各校二年级至六年级的一个自然教学班作为被试对象,发放测试卷共605份,有效试卷566份。测试后我们对试卷进行编码并利用SPSS软件进行统计分析。

## 三、研究结果与分析

### (一) 小学生空间观念发展水平和规律的整体分析

首先,我们以年级为自变量来考察小学生空间观念的发展水平以及年级间的差异。从统计结果中我们发现,二年级与三年级间无显著性差异,四、五、六各年级之间也不存在显著性差

异,但二、三年级与四、五、六年级分别都存在显著性差异。从学生空间观念的发展曲线和年级间的差异检验结果中我们得到,总体上来说,小学生的空间观念水平随着年级(年龄)的增长而提高,而整体上分为两个不同发展阶段,即二、三年级(7—8岁)的水平接近,处在同一个发展阶段;四、五、六年级(9—11岁)处在同一个发展阶段。

接下来,我们按照已划分的三个水平来考察各个年级的学生在这三个水平上的发展情况。

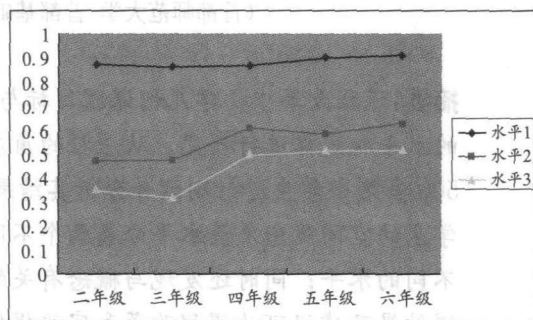


图1 空间观念总体发展水平的统计分析

从图1中我们直观地看出各个年级都能很好地达到水平1,五个年级之间差异不大。在水平2和水平3,五个年级大致分成了两个集合,二、三年级一个集合,四、五、六年级形成一个集合,这样的结果与前面分析的总体的发展规律是一致的。另外,四、五、六年级能够较好地达到水平2,但二、三年级在水平2的表现一般;对于水平3来说,四、五、六年级的表现一般,而二、三年级就更差了。

### (二) 小学生空间观念发展规律和水平在四个方面的具体表现

为了进一步了解学生在轴对称、旋转、方位和视图等方面空间观念的发展水平,我们分别对各个部分的测试结果进行了统计分析,结果表明,年级间在各个分测试上都存在显著性差异。

#### 1. 轴对称测试中,小学生空间观念发展水平和规律的分析

轴对称的测试主要考查学生在图形折叠的过程中形成表象并进行一定的推理、再现后对结果的想象和预测的能力和水平,其中有些问题涉及对轴对称概念的理解,有些问题则更多地关系到学生对折叠过程形成表象并进行心理表征的能力。在各水平上图形的复杂性和图形的折叠次数

不同。

反映各个年级在轴对称测试中的发展水平的统计图 2 告诉我们,它与总体的发展水平大致接近。如果从测试题目的具体类型和一些问题的特点去考查学生空间观念的发展规律我们会得到更多的信息。

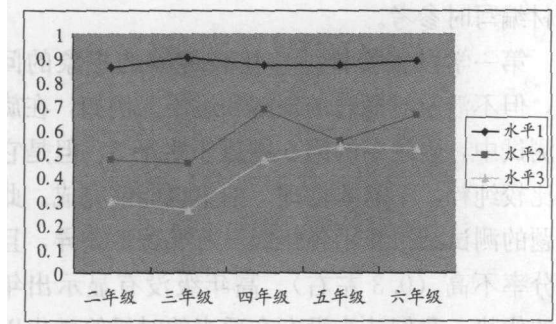


图 2 各年级在轴对称测试中的发展水平

具体来说,二、三年级的学生能够达到对轴对称概念(图形)的最直观的认识(如附录第1题图1),也更适合在一次折叠的水平上解决问题;而涉及对轴对称概念的进一步理解(如附录第1题图4)以及涉及两次折叠的问题(如附录第5题),低年级与高年级的学生之间存在着显著性的差异,这样的问题更适合四、五、六年级的学生,但是也只能有部分四、五、六年级的学生能够解决水平3的问题。

对轴对称概念的理解与应用,一般要到四年级(9岁)左右时才有能力接受,测试结果也表明,在适当的时候进行有关轴对称概念及其应用学习是必要的。

## 2. 旋转测试中,小学生空间观念发展水平和规律的分析

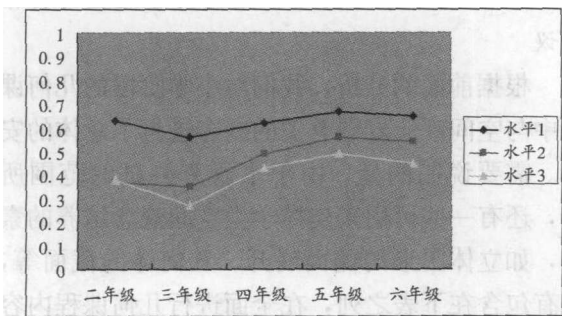


图 3 各年级在旋转测试中的发展水平

从图 3 中我们能够直观地看出,各年级在旋转测试中的水平1上没有太大的差异,在水平2上,四、五、六年级表现一般,而在水平3上,他们的表现就更差一些;二、三年级都不能达到

水平2和水平3的基本要求。与轴对称测试结果相比,旋转测试中学生的得分率在三个水平上都略低一些,可以看出,在处理旋转问题时对学生空间想象的要求更高,学生在这方面的发展要更迟一些。

对于与概念理解有关的问题来讲,二、三年级表现相近,四、五、六年级相近,两个集合间存在一定的差异。对于单纯的空间想象的问题,即使对于水平较高的问题(如附录中的第6题),年级间的差异也不显著。

## 3. 方位测试中,小学生空间观念发展水平和规律的分析

本测试按课程中的要求主要考查学生在已知四个方向(东、南、西、北)或只给出其中一个方向的情况下,确定平面上一物体相对于观察点的四个方向以及东南、西南、东北、西北等方向和位置,进一步地能够在同一情景中想象出观察点变化后,物体的相对方向和位置等。

我们通过描述三个水平的得分率曲线(图4)可以直观地了解到各年级在方位方面空间观念发展水平的情况。从统计图中我们发现与前面两个分测试类似的结果。

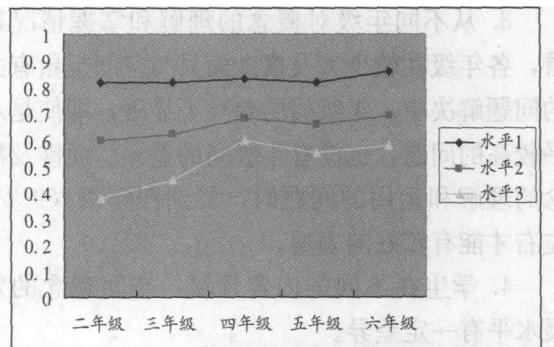


图 4 各年级在方位测试中的发展水平

在考查学生的方位水平时,有一个问题值得我们注意,就是观察点的选定和变化,会对学生的想象和判断产生怎样的影响。当以原点为观察点确定方向和位置时,各年级间没有显著性差异;当观察点不在坐标系的中心时,出现了年级间的显著差异。高年级排除坐标轴中心的干扰的能力更强,年级间的显著差异主要表现在二、三年级与四、五、六年级这两个集合之间的差异。

## 4. 视图测试中,小学生空间观念发展水平和规律的分析

视图部分三个水平的得分率统计曲线显示,

四、五、六年级在三个水平上不占有大的优势，这是与前三个分测试所不同的结果。因此，视图的内容可以较早地让学生接触，就像旋转测试中的空间旋转的问题那样，及早地“刺激”“激活”，抓住空间观念发展的好时机，可以有效地促进学生空间观念的发展。即适时的教学干预是十分必要的，否则学生空间观念的发展就会受到抑制甚至存在无法弥补的欠缺。

### （三）主要结论

1. 测试的总体结果表明各个年级都能很好地达到水平 1，年级之间的差异不大。在水平 2 和水平 3 上，四、五、六年级都高于二、三年级，并且四、五、六年级能够较好地达到水平 2，但在水平 3 上的表现一般；二、三年级在水平 2 的表现一般，基本不能达到水平 3。分别考查学生在四个分测试上达到的水平的情况，除视图外，也基本上支持总体所得结论。

2. 二、三年级学生的空间观念发展水平比较一致，四、五、六年级学生的发展水平差异不大，因此在空间观念的发展过程中，可以将他们看成为两个发展阶段。这一结论与我国目前学段的划分一致。

3. 从不同年级对概念的理解和掌握情况来看，各年级在较少涉及概念而只与空间想象有关的问题解决中，年级间的差异不显著，即使是水平较高的问题，也没有年级间的差异。而涉及概念的理解和运用的问题时，要到四年级（9 岁）左右才能有较好的表现。

4. 学生在不同的内容领域，空间观念的发展水平有一定差异。

## 四、对小学几何课程中相关内容设置的讨论与建议

### （一）对小学几何课程设置的讨论

按照本研究对空间观念水平的划分，结合本研究测试的结果，总体上讲几何课程中有关空间观念培养的内容大致可以按如下的水平安排：

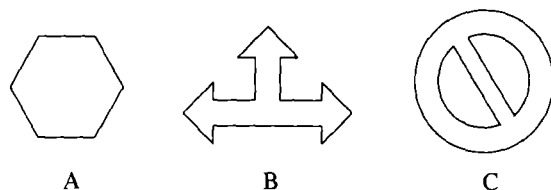
（1）可以在第一学段安排各个分测试中水平 1 的内容，还可以考虑安排方位的水平 2 的内容；

（2）可以在第二学段安排各个分测试中水平 2 的大多数内容，以及轴对称和方位的一部分水平 3 的内容；（3）水平 3 的其他一些内容可以安排在初中阶段完成。

此外，根据前面分析讨论的结果，学生在空间观念方面的一些特点也值得我们在课程设计和教材编写时参考。

第一学段宜安排一些比较纯粹的想象的问题，但不涉及对概念的理解和运用。例如，在旋转测试中，附录中的第 6 题属于水平 3，但是它又比较纯粹，不需要推理、抽象也能够完成。此问题的测试结果显示各年级没有显著性差异，且得分率不高（0.3 左右）。高年级没有显示出年龄的优势，我们认为没有在适当的时候给学生以刺激或者没有进行适时的教学干预可能是主要原因。

需要对概念认识、理解乃至运用的问题，要到四年级甚至更高年级更合适。例如在轴对称测试中（见下图），要求找出图 A、图 B 和图 C 的所有对称轴，学生在初步认识轴对称的定义后，能正确回答图 B 和图 C；但是只有既理解了概念又能够进行适当的分析、推理，学生才能够找出图 A 的所有对称轴。测试中四、五、六年级的学生还不能很好地完成此问题。



### （二）对小学几何课程相关内容设置的具体建议

根据前面的分析，我们对小学阶段的几何课程中与空间观念发展有关的内容进行了总体的安排。需要说明的是，由于本研究测试的范围所限，还有一些可用来支撑学生空间观念培养的素材，如立体图形的侧面展开、几何体的截面等，没有包含在下表之列，在全面进行几何课程内容设置时，当一并考虑。

表 1 义务教育阶段几何课程中部分内容的设计方案

	旋转	轴对称	方向与位置	视图
第一学段	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 了解图形旋转的含义;</li> <li>● 直观认识并能够识别旋转自对称图形;</li> <li>● 直观判断简单平面图形旋转后的图形。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 了解轴对称图形的含义;</li> <li>● 直观认识与识别简单的轴对称图形;</li> <li>● 想象或画出经一次折叠操作后得到的结果。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 认识东、南、西、北、东北、西北、东南、西南八个方向;</li> <li>● 以坐标中心为观察点判断以上八个方向的物体的位置;</li> <li>● 将方向与度量联系起来,确定物体的位置;</li> <li>● 初步认识用数对可以描述物体的位置。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 在生活场景下,判断从不同方向看到的画面,识别不同物体之间的相对位置关系;</li> <li>● 判断或画出从不同方向观察一个实物或简单的几何体所看到的物体的形状。</li> </ul>
第二学段	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 直观认识并能够识别较为复杂的旋转自对称图形;</li> <li>● 直观判断平面图形旋转后的相应图形;</li> <li>● 在方格纸上画出一个图形绕一点旋转后的相应图形。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 直观认识与识别较为复杂的轴对称图形(包括对其多条对称轴的认识);</li> <li>● 判断经两次或两次以上的较为复杂的折叠操作后的结果;</li> <li>● 画出经两次或两次以上的较为复杂的折叠操作后的结果。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 初步认识如何用数对描述物体的位置;</li> <li>● 以坐标中心以外的点为观察点,或在简单方向指示下任意选定观察点,判断物体的八个方向。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 判断或画出从正面、上面和侧面观察到的物体或简单几何体的二维图形;</li> <li>● 能根据视图推断几何体的形状。</li> </ul>

#### 参考文献:

- [1] *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century-An ICMI Study (Volume 5)* [M]. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] 课程教材研究所. 20 世纪中国中小学课程标准·教学大纲汇编 数学卷 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2001. 3—204.
- [3] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准(实验稿) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001. 7.
- [4] 施建农, 周林, 查子秀等. 儿童心理折叠能力的发展 [J]. 心理学报. 1997, (2): 160—164.
- [5] 毕鸿燕, 方格, 翁旭初. 小学儿童二维空间方位传递性推理能力的发展 [J]. 心理学报. 2004, 36 (2): 174—178.
- [6] 周详, 曾晖. 现代认知心理学关于空间能力和心理旋转的研究 [J]. 心理科学. 1995, (6): 363—365.
- [7] R. W. Copeland (柯普兰). 李其维, 等, 译. 儿童怎样学习数学——皮亚杰研究的教育含义 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1985. 2.
- [8] Jean Piaget, Barbel Inhelder, Alina Szeminska. *The Child's Conception of Geometry* [M]. Reprinted in 1999 by Routledge 11 New Fetter, London EC4P 4EE.

#### 【附录】

1. 判断图 1 和图 2 是否为轴对称图形? ——水平 1



图1



图2



图3

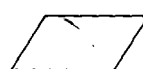
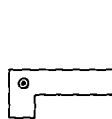


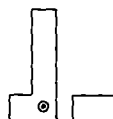
图4

2. 判断图 3 和图 4 是否为轴对称图形? ——水平 2

3. 一张纸片被一个图钉固定在桌面上, 可以绕图钉旋转这个纸片。下面哪个是纸片绕图钉旋转后得到的? (把你认为正确的选项添在下面的空白处) ——水平 2



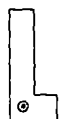
A



B

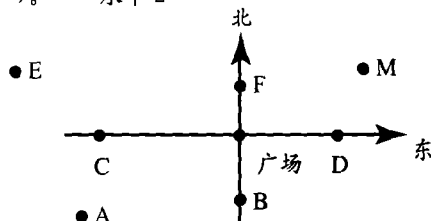


C



D

4. 如图, 回答下面的问题 (在你认为正确的选项上画“√”)。——水平 2



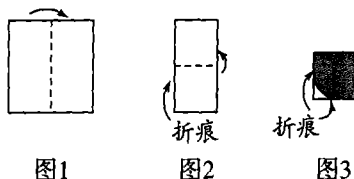
- (1) 小刚家在广场的南面, 小刚家所在的位置是

1. A    2. B    3. E    4. F

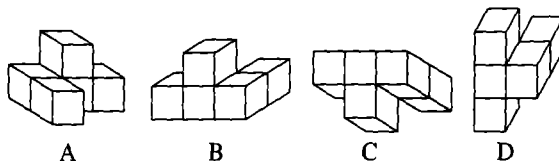
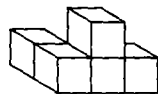
- (2) 邮局在广场的西北, 它所在的位置是

1. A    2. D    3. E    4. M

5. 将一张纸对折两次(图1、图2),然后按图3所示剪开,去掉阴影部分,画出剩余部分完全展开后的图形。——水平3



6. 右面这个立体图形可以在空间旋转成不同的位置。右栏上方的哪一个图形是它旋转后得到的?(把你认为正确的选项添在右图下面的空白处)——水平3



7. 如第4题图所示,回答下面的问题,在你认为正确的选项上画“√”。——水平3

(1) 广场在医院的东面,医院所在的位置是

1. A 2. C 3. F 4. D

(2) 广场在小丽家东北,小丽家所在的位置是

1. A 2. D 3. B 4. M

(责任编辑:王维花)

## Constructing the Geometry Curriculum Beneficial for the Development of Students' Spatial Sense

LIU Xiao-mei

(Capital Institute of Basic Education Development and Research, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

**Abstract:** The changes of the aims and the contents of the primary geometry curriculum require us to study the development rules and levels of the spatial sense of the students. Designing the test paper from the view of curriculum is our research foundation. 500 pupils were selected to take the test. By analyzing the test result, we find that the development levels of the spatial sense of Grade 2—3 students and Grade 4—6 students represent two development stages, and they reach different levels of spatial sense in different contents of the test. It is also indicated that students in Grade 4 can fulfill the tasks better, which involve the understanding and application of the concept. Some suggestions are put forward on the design of related content of geometry curriculum for primary schools.

**Key words:** geometry curriculum; spatial sense; development level; pupils



一线教师的朋友 科研人员的舞台 行政决策的参谋

《班主任》杂志向您致敬

# 教育科学研究

[月刊]

主办:北京教育科学研究院

欢迎订阅 班主任 杂志

邮发代号: 2-769

主办:北京教育科学研究院 北京广播电视大学

《教育科学研究》为综合性教育学术刊物;主要面向广大一线教师、校长,教育研究人员及教育行政管理人员;发表教育理论研究、教育政策评析、教育热点专论、教育问题调查、教育改革实验和国外教育动向等文章;稿件以反映教育现实和实践问题为主,强调理论联系实际,小问题深挖掘,低重心高质量。

《教育科学研究》刊号: CN11-4573/D; 大16开, 80页; 每月10日出版; 每册定价8.00元, 全年定价96元。

联系地址:北京市朝阳区北四环东路95号

教育科学研究杂志社(邮编:100101)

电话: 010-84649579 010-84635989 (FAX)

E-mail: esr1203@sina.com

《班主任》办刊目标:

办成全国一流的班主任专业杂志,使其成为——

班主任的心灵家园、交流平台、专业读本、培训教材

**主要栏目:**“理论与实践”“特别关注”“全国优秀班主任讲坛”“工作笔谈”“心理健康教育”“生活与修养”“班级活动”“班级文化之窗”“我心目中的好班主任”等。

邮发代号: 82-799 刊号: CN11-1125/G4

网 址: www.banzhuren.com

地 址: 北京市朝阳区北四环东路95号

邮政编码: 100101

编辑部电话: 010-84655987

发行部电话: 010-84634575

广告部电话: 010-84631422

每册定价: 4.00元 全年定价: 48.00元

开户银行: 交通银行育惠东路支行

账 号: 110060971018001356233

收款单位: 北京育新《班主任》杂志综合服务中心

2009年征订已经开始, 杂志社可破月订阅和补订全年杂志