

第16章

發展測量概念

在 新的《學校數學原則和標準》中，NCTM（美國數學教師協會）橫跨幼稚園到十二年級的五個內容標準，其中之一是「測量標準」，但《標準》所建議測量的主軸並未在最傳統的課程中被接受。《原則和標準》的作者指出，測量在我們的生活中是普遍深入並且提供學習和應用數學的機會，測量法能夠提升或幫助對算術、幾何學、統計學和函數的學習。

在《原則和標準》中「測量標準」，也指出這個主題的複雜性。從幼稚園到八年級間，學生必須學習找出他們要測量的屬性（諸如長度、重量、容量等等）；測量的意義，包括測量單位的理解以及單位大小如何影響測量；選擇及操作測量的儀器；測量的系統（公制和慣用制）；和能夠決定測量使用的公式。測量比我們所瞭解的更加複雜。

教學重點

- 確定測量屬性 → 最好測單位 → 用測工具測量
1. 測量涉及使用相同屬性（如長度、體積、重量等）的單位，來測量某一個物件的比較；為了有意義地測量任何事物，必須理解測量的屬性。
 2. 有意義的測量及其估測，取決於個人所使用測量單位的熟悉度，幫助學生有意義使用工具，防止測量錯誤。
 3. 測量工具是在進行比較時，代替實際測量單位的必要設備，瞭解測量工具如何使用，有助於有意義地正確操作工具。

4. 面積和體積的公式是使用長度的測量來計算物體的面積或體積單位的一種方式，而非使用在面積或體積的單位。
 5. 面積、周長和體積彼此關聯，例如一平面區域面積不變，周長如何改變？一立體的體積不變，其表面積如何變化？
-

第一節 測量的意義與過程

假定你要測量一個空的桶子，你需要知道的第一件事情是桶子要被測量什麼。有多種長度可被測量：高度或者深度、直徑（通過的距離）、圓周（環繞的距離）；側面的表面積；水桶也具有體積和重量等等，這些可測量的每一方面都是水桶的一個屬性（attribute）。

一旦你決定測量的屬性，你會選擇測量的單位。單位必須有要被測量的屬性，用有長度的單位測量長度，用有體積的單位測量體積等等。

技術上來說，測量（measurement）是一個數，用以表明測量物體屬性，以及測量給定單位的相同屬性之間的比較。我們一般用測量的小單位實測，用以決定被測量物體和單位之間的數字關係（即是測量）。例如：測量長度，能夠由長度直接做比較測量單位的複製。注意到這正是當你使用直尺或捲尺時所做的。測量重量，這是重力或者一種拉力，物體的重量首先應用在彈簧上；然而，查明重量的多少「單位」，也就是產生對彈簧的相同影響進行比較。不論哪一種情況，物體的測量是指多少個「單位」？

對學校課程中測量中的屬性而言，我們可以說測量的意思是屬性被相同屬性的測量單位「填滿了」或者「覆蓋了」或者「相匹配」（如同在圖 16.1 說明那樣）。測量的這個概念將充分提供這章的目的以及與孩子們討論測量的一種好方法。有了這樣的瞭解，即可敘述一個測量的屬性是需要多少單位的計數以填滿、覆蓋或者相匹配物體的屬性。

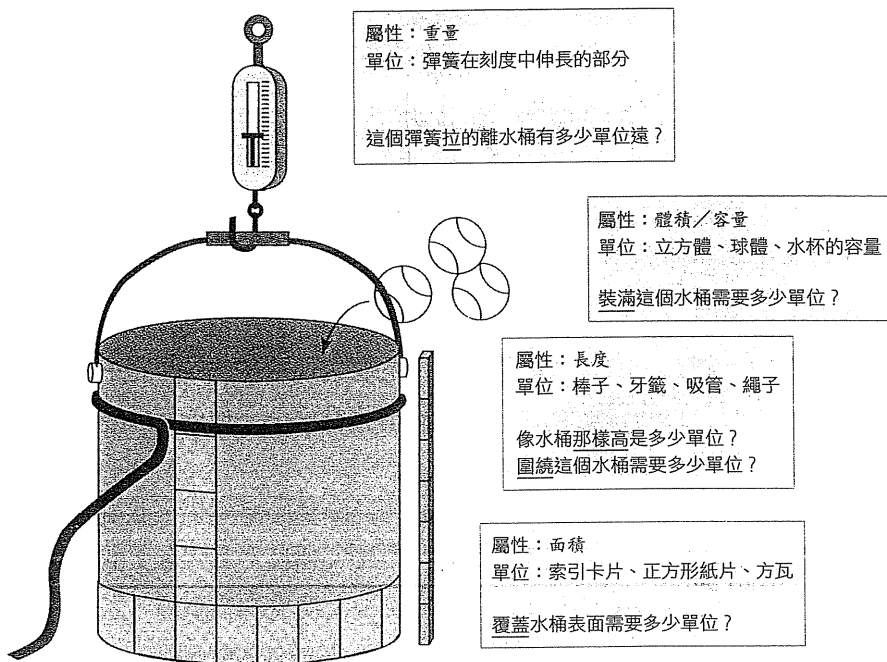


圖 16.1 測量一個水桶之不同屬性

總之，為了測量某物，必須完成三步驟：

1. 決定測量的屬性。
2. 選擇該屬性的單位。
3. 比較這些單位，透過填滿、覆蓋、相匹配或者一些其他的方法，測量物體的屬性。

測量的工具，例如直尺、刻度尺、量角器和時鐘，是使進行填滿、覆蓋或者相匹配過程較容易的測量設備。直尺列有長度單位的編號；量角器列有角度單位的編號；時鐘列有時間單位的註記。

第二節 發展測量的概念及其技能

在一年級的典型活動，用 1 米長的帶子測量他們的教室長度，但這些長條帶有些會重疊或像蛇狀彎曲圍繞書桌等；他們能理解教室屬性的長度概念嗎？他們能否理解每一條 1 米帶子都有長度的屬性呢？他們知道任務是要把比較小的單位填滿較長的長度單位嗎？他們有可能瞭解的是：他們沿著牆形成直線（從他們有利的觀點來看，他們做得相當好）。他們完成一種工具性之程序步驟，但沒有概念性的基礎。

教學的一般計畫

測量的一個基本理解是，怎樣幫助孩子們發展測量的概念性知識？

發展概念上的知識	使用的典型活動
1. 瞭解測量的屬性。	1. 以屬性為基礎進行比較。
2. 理解填滿、覆蓋、相匹配或者進行單位屬性的其他比較，產生稱之所謂的測量。	2. 使用測量單位的具體模型進行填滿、覆蓋、相匹配，或者使用單位去做屬性的必要的比較。
3. 理解測量設備運用的方法。	3. 製造測量工具且使用它們，並與使用實際的單位模型比較運用的方式。

簡要的討論這些教學活動中。

進行比較

當學生基於某種可測量的屬性進行比較時，屬性成為活動的焦點。例如，一個盒子的容量與另一個盒子比較，是多？是少？或者幾乎相同？任何

測量法都不需要，只須設計能將一個體積和另一個做比較。「容量」的屬性（一個容器能夠裝多少？）是不能避免的。

許多屬性能夠直接比較，例如直接把一個長度放在另一個長度上。在體積或容量的例子裡，很可能需要某種間接的方法，如同用大豆充滿一個盒子，然後倒到另一個盒子裡。另一個間接比較例子，用一條繩子比較廢紙簍的高與其開口之周長，這繩子是媒介，兩者之間的長度是不可能直接比較的。

建立某些測量屬性的相同是另一種類型的比較活動，例如「把吸管剪得像一段粉筆那樣長」或者「畫正方形和三角形一樣大（相同面積）」。

使用單位模型

對大部分在小學裡測量過的屬性，可能有測量單位的具體模型。時間和溫度是例外（還有許多其他的屬性，一般在學校裡沒有測量同時也沒有具體的測量單位，例如光的強度、速度、響度、黏性和放射性等。）單位模型有非正式單位和標準單位。如長度，喝的吸管（非正式）或者有刻度的長條 1 英呎（標準）皆可以當作單位。

單位模型的理解使用，實際上最容易是，使用所有需要填滿或者與屬性相匹配的單位的複製來測量。用索引卡片單位測量桌面的範圍，你能夠用一些索引卡片逐一地覆蓋這個整個書桌。只使用一張索引卡片反覆去複製一物件之長度，是有些困難，尤其是幼兒。也能只用一張卡片去測量桌面的面積，但要注意卡片覆蓋位置之移動，不能遺漏或重複。

用不同大小的單位測量相同的物體，這很有用；應該事前預料結果和事後討論，將幫助學生理解使用的單位與要測量的屬性同樣重要。更小的單位產生更大的數字測量，反之亦然；較小的學童不易於瞭解這個事實，只能夠實際上用不同大小的單位去測量，以構築這個反轉關係。結果的預測和討論增加到這些活動的思考性質。

製造和使用測量工具

在美國第六次 NAEP 測驗中（Kenney & Kouba, 1997）僅有 24% 的四年級

學生和 62% 的八年級學生能用直尺正確測量出物體的長度，如圖 16.2。這些結果指出使用一個測量工具和理解如何使用，是有所差別。當一個測量工具上的刻度不只一個單位時，學生會面臨困難。



圖 16.2 這線段有多長？

如果學生使用他們熟悉的單位模型實際上去製造簡單測量工具，他們更可能理解一個工具如何測量，直尺是一個好例子。學生沿著一條直線以具體模型移動作記號，他們能夠看到尺上的空間位置（spaces），而不是記號或者數字，這是重要的。用實際單位模型的測量與使用一個工具的測量比較，這是必要的。沒有這個比較，學生也許不理解這兩個方法確實是達到相同目的之兩個手段。常常要求學生解釋尺、刻度或者其他的工具，與實際單位使用上的比較。

本章底下的內容，將針對每一種屬性，討論學生製造與使用測量的工具。當然，孩子們也應該使用標準的現成工具如尺和尺度，以及與相對應的單位模型的使用做比較。

非正式單位和標準單位：每一種使用的理由

在小學階段，很普遍使用非標準或者非正式的單位，來測量長度和面積；遺憾的，在更高年段，測量其他屬性的活動經常不從非正式單位開始。在各個年級，把非正式單位使用在開始的測量活動是有利的。

1. 非正式單位更容易直接聚焦於屬性的測量。不用平方公尺來測量面積，而以各種不同單位測量（有些也不是正方形）能夠幫助理解面積及其單位的必要特性。
2. 小心選擇單位，使得測量得到的數字大小能夠合理。當測量距離較長時，一年級的學生能夠測量少於 20。六年級的學生在測量角度時，使用的單位要比「1 度」更大得多，因為 1 度（ 1° ）實在太小了。

3. 非正式單位的使用，能夠避免在一開始的課程中與目標衝突。你的課程是關於測量面積的意義或是理解平方米？學習測量與學習測量單位是不同的。
4. 非正式的單位為使用標準單位提供一個好的理由。在你班級已經用自己的單位測量過相同物體後，標準單位的討論將會更有意義。
5. 非正式的單位使用會很好玩。

標準單位的使用，在各個年級的測量課程中也很重要。

1. 標準單位知識是測量課程的一個有效目標且必須提出，學生不僅需要發展熟悉的標準單位，而且也必須學習它們之間的適當關係。
2. 一旦測量概念發展得相當好，使用標準的單位經常是容易的。如果已經沒有使用非正式單位的教學理由，為什麼不使用標準的單位並提供學生發現的機會？

對於何時使用標準單位或者非正式單位，並沒有簡單的規則。兒童對每一種屬性的最初測量，應該從非正式單位開始，並且對標準單位的使用和標準測量工具有所進展。使用非正式單位模式所應花費的時間數量，隨著兒童的年齡和測量屬性而變化。一年級學生需要很多非正式單位的經驗，像是長度、重量和容量的非正式單位，也許全學年都在使用。相反地，在中學階段，質量或容量使用非標準測量單位的好處僅僅持續二或三天。

在學習測量中估測的角色

無論使用非正式單位或標準單位，在學生完成測量之前，估測是很重要的事。把估測包括在測量活動裡的三個理由：

1. 估測幫助學生集中於屬性之測量及其過程。例如思考如何使用撲克牌估計這本書的面積，如此，必須思考面積是什麼？此單位如何可以覆蓋書本？
2. 估測對測量活動提供內在動機。看到如何估測得更精確，這是有趣的；或者你這組能夠估計的比另一組更好。

3. 當標準的單位使用時，估測幫助發展單位的熟悉程度。如果你在測量之前使用公尺單位去估測門的高度，你必須發現一些方法去考量「一公尺」之長度。

幫助孩子估測

應該把估測包括在所有測量活動裡，現在的問題是如何進行做這類的活動。待會兒，我們要討論教孩子在生活中能夠使用的估測策略。然而，直到已發展了這些策略，否則兒童將有估測的困難。這裡有三種方式要求兒童做估測，但要避免以實際的數值或估測值回答：

1. 要求比較的估測，而非測量。例如：這位教師身高比2米高或矮，還是一樣高？書有多重？與1磅比較，是更多、更少或者幾乎相同？學生能夠用非正式單位做相同的問題：桌面的面積，比與20個索引卡片覆蓋的範圍更多、更少，或幾乎相同？
2. 詢問哪一個測量與實際的測量更接近？例如，角度測量更接近15度、60度，或者90度？盒子的容量更接近1公升或者3公升？
3. 提供一個實際單位，或此單位的倍數大小作為比較之用。先讓兒童私底下在紙上寫下最初的估計值，然後提供一實際單位，或此單位10倍或100倍大小的顯示，讓他們用以調整估計值。提供使用實際單位大小或其倍數大小的模型，使兒童有視覺的心像比較，首先做估測活動，可增加樂趣。例如，在黑板的一端看見一條10個小立方體排成的長條，他們從視覺上以此10個組成一條長條，作為測量黑板長度的工具。由於十進位位值的原因，建議用10或者100等常用單位。對於一米或者一仟克的大單位，能夠在估計物體旁邊直接複製單位。當然，對於像重量的屬性，他們也能夠處理物重及其單位。

留意這三個方式有一個發展進程，就是估算的需求要到怎樣的精確度。在發展兒童的估測技能時，注意其發展的提升。

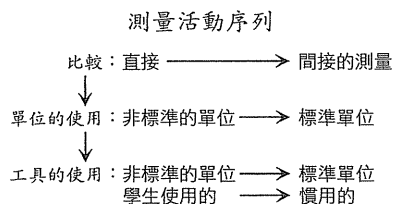
測量的近似性質

在所有測量活動中，強調近似用語的運用。書桌大約是 15 支積木長；椅子的高度稍微比 4 支吸管的低。近似語言的使用對幼兒是更有用的，因為許多精確測量還沒出現。年齡較大的孩子，將開始使用更小的單位或者用分數單位來盡力確切地測量。此時有機會去發展「凡是測量，都有誤差」的概念。每一個更小的單位或者更多切割都確實能讓精確度更高。例如，一個長度測量之誤差從不可能超過於二分之一測量單位（此即測量之最大可能誤差），然而，因為數學沒有「最小的單位」，測量總是包含某些誤差。

精確度是與所使用單位的大小相關的，這是所有測量任務中的一個重要想法。有時候也許不要求精確度，而以較大的單位較容易處理；但有時，要求精確度時，較小的單位變得重要。例如，估測窗戶要安裝的玻璃大小，其精確度要求是比計算多少個 4 呎×8 呎的面板去覆蓋一面牆，要來得更高些。能夠察覺到精確度是與測量單位大小，以及在各種情境下有不同的精確度要求，是測量教學中很重要的一面，尤其是在高年級階段。

建議測量程序

對於所要測量物的屬性，我們已經討論三種確定使用的測量活動。比較活動通常應該先於單位的使用，而測量工具應該最後呈現。在每一個活動內，考慮其測量活動之進展序列：



幾乎所有的活動都應該包括估測部分。標準單位的熟悉也是重要目標。在接下來的章節中，針對每一個屬性（長度、面積、體積和容積、重量和質量、角度、時間），活動分別討論比較、單位的使用和工具的使用，也包含介紹標準單位與估測活動。

第三節 測量長度

長度通常是第一個學生學習測量的屬性。然而，對年紀小的孩子們來說，通常無法立即理解長度測量。

比較活動

幼稚園層級的孩子應該從二個，或二個以上長度的直接比較開始。

活動

16.1 比較長、比較短、一樣長

進行一個長度分類站，展示一物體，讓學生分類各種不同種類的物體：是與此展示物體一樣長？或比較長？比較短？在教室中設置幾個這樣的站是容易的。偶爾更換這個參考物體，以得到不同的分類。一個類似任務是，將物體由最短到最長排序。

活動

16.2 長度搜尋

兩人一組活動，給每一組學生一些工具：例如一條有刻度記號之長條紙、一支棍子、一段繩或者具有明顯長度屬性的一些其他物體。任務是可以在房間裡找到五件東西，與所給予的工具比較，有比較長、比較短或者幾乎相同的。他們能夠把發現的東西用畫圖片或者寫名字的方式表示出來。

與不是直線的長度比較是很重要的，有一個方法可以去做，就是用線或者繩子。學生能夠用繞繩子的方式來找到物體的長度。例如，做離地板到人們的頭或者肚臍的距離，或者圍繞頭圍或腰圍的長度。身體測量總是一件好玩的事。

間接比較是長度比較的下一步驟。

活動

16.3 彎曲路徑

利用護條膠帶在地板上畫出歪的或彎曲的路徑。任務是要決定哪個路徑是最長的、次長的，依此類推。學生應該可以發現一個方法，作一條平直路徑和這些彎曲的路徑一樣，才能夠容易進行比較。（你也可以不要提供這個建議。）給一部分學生提供一長條的繩子。如果這條繩比這些彎曲的路徑更長，這個任務更容易。學生能夠拉直他們在木板上的路徑，以護條作記號，或者使用你所設計的一些其他的方法。使學生解釋他們是如何解題。（這也是一個好的戶外活動。）

也能夠在學生的書桌上做小距離「彎曲路徑」的活動。可以準備像圖 16.3 的簡單練習題。不用彎曲的路徑方式，學生能夠求像簡單形狀圖形的周長。

使用長度的單位

學生可以用許多非正式單位來開始測量長度，舉例來說：

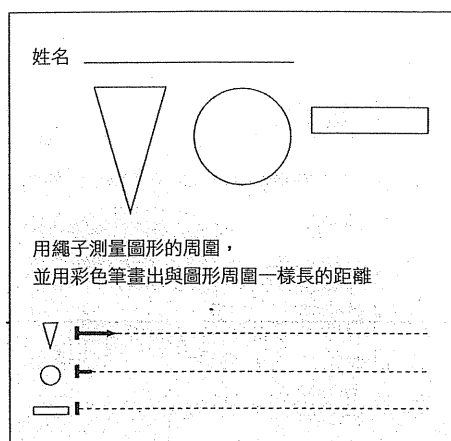


圖 16.3 做一條與彎曲路徑一樣長的直線線段

巨人腳印：用廣告板製作大腳印大約 45 公分到 60 公分長，準備 20 份相同備份。

測量條：廣告板剪成大約 5 公分寬，可以做成不同單位使用。有些廣告板可以做得比較長，一些比較短，另一些大概 30 公分長，並塗上不同的顏色。

測量繩：把棉繩剪成 1 米長，這些可用於測量彎曲的線和例如教師書桌這樣大物體的周長。

塑膠吸管：用吸管是比較便宜且提供大量的有用單位。吸管容易切成更小的單位。你可以把吸管連成長串使用。長串的吸管對直尺或者捲尺是很好的橋樑。

短單位：牙籤、可嵌接的方塊積木、木製立方體和迴紋針都是對於測量較短的長度的有用單位。古氏積木是最好的單位之一，包含十個不同長度單位，且容易連結兩端，並且能夠與彼此有關。迴紋針可以很容易變成鏈條。

活動

16.4 猜測和測量

做一個測量表來測量房間裡的物品（參看圖 16.4），對更年幼的孩子，沿著要測量的每一個物體的各個向度做膠帶護條。在表上指定使用的單位，不可忘記要包括曲線或者其他不是平直的線的距離。在測量前都應有估算，年幼孩子起初估算距離不會很好。




姓名 _____		
	你的身體周圍輪廓 單位：_____ 吸管 猜測：_____ 個吸管 測量：_____ 個吸管	
	<hr/>	
		老師的書桌 單位：橘色的棒子 猜測：_____ 根橘色的棒子 測量：_____ 根橘色的棒子
<hr/>		
	書的周圍 單位：迴紋針 猜測：_____ 根迴紋針 測量：_____ 根迴紋針	

圖 16.4 用非正式長度單位測量並記錄

對年紀小的孩子，初始測量應該沿著線或者邊。如果不同的學生測量相同的距離，卻得到不同結果，要討論哪裡不同。討論幫助我們聚焦在為什麼單位需要排好，而且像繩子的單位必須伸展到完全的長度。

活動

16.5 改變單位

先使學生用一種單位測量一段距離，然後提供不同單位，看是否能夠預估具有新單位的測量。學生應該把他們如何預估和解釋寫下來，然後，進行實際測量。在接下來預估和解釋的課堂上討論，將是活動的最具教育意義的部分。最初幾次進行這項活動，較大的單位應該是較小的單位的簡單倍數，如果這兩個單位不是成整數倍數的相關，這個活動變得較為困難。

兩種單位和單位的分數部分

當孩子發展對更多精確度的需求時，會同時使用兩個單位。第二個單位應該是第一個的次單位。例如，連接方塊積木（小立方體），第一個單位可能是 10 個方塊積木的長條，第二單位可能是一個「方塊」或「小立方體」；使用測量條，製造長條的四分之一或十分之一的次單位；把塑膠吸管剪去，因此數個迴紋針等於一個吸管長；古氏積木考慮到更多變化，例如，4 個紅色組成棕色的，或者 10 個白色做成一個橘色。先要求孩子用較大的單位測量，直到越來越多部分沒有適合單位可用，然後增加足夠的較小單位填上距離（參看圖 16.5）。利用兩種單位報導測量：「8 個吸管和 3 個迴紋針長」。對稍長的學生，較小的單位可能是較長單位的分數部分。

在已經製造和記錄兩個相關單位的測量以後，要求學生想出如何用任一個單位報導這相同的測量，例如， $5\frac{2}{3}$ 的藍色古氏積木，或者 11 個淺綠色

古氏積木（3 個淺綠色 = 1 個藍色）。這為標準單位提供容易的練習。例如，4 英呎 3 英吋的測量是報導為 51 英吋或者報為 $4\frac{1}{4}$ 英呎。如此，兩個單位之使用，有助於在尺上分割劃記。

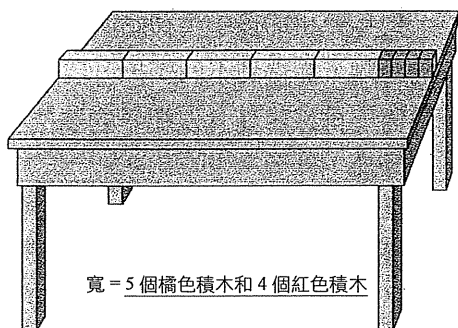


圖 16.5 用兩種單位來測量長度

製造和使用尺

直尺和捲尺幾乎可由任何的測量單位製造。學生在製造尺之前，使用實際單位模型是很重要的。

尺的建立應該直接關係測量經驗，所用單位是小的單位且不少於 5 公分。並且準備大約 5 公分寬的長條板。如果教師事先裁剪方格紙之長條，可以指導學生使用。討論紙條如何在測量上應用的像實際單位一樣好。下一步學生可以沿著標籤木板的邊黏貼覆蓋紙條單位，使用兩個對比顏色且交替使用如圖 16.6 顯示。

把一條一條單位紙張黏貼在畫線尺上，增強尺和實際單位之間的連結。年長的孩子可以透過使用真實單位來沿著條板構成記號，然後在這些空間中塗上顏色以製造尺。孩子們不應該被鼓勵利用尺的末端用作起點，很多真正的尺不是如此製造。如果尺上的第一個單位沒有與尺的末尾相符合，許多尺就無法成為測量的方法，迫使學生要注意尺上的單位與測量的物體一致。

學生最終應該把數字放在他們自製的尺上，如同在圖 16.7 顯示那

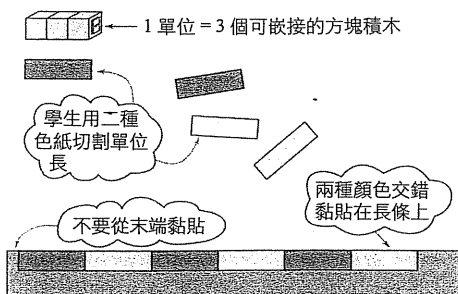
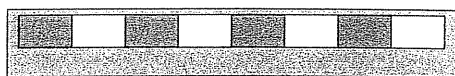


圖 16.6 製造簡單的直尺

樣。年齡小的孩子可以在每一個單位的中間寫上數字，使得更清楚數字是預先計算單位的方法。

當這些單位的末尾透過標準的方法寫數字時，這個尺成為數線（number line）。這個排版更是精緻的且應該與孩子們精心討論。（數線在三年級以下，通常是孩子們的一個貧乏的數字模式。）



第一支尺：學生計數單位



第二支尺：寫數字在單位的中間，幫助計數



標準尺：數字放在單位的末端

圖 16.7 對在尺上的數字賦予意義

評量注意事項

圖 16.7 說明一個發展進程，應該鼓勵孩子製作和在他們作成的尺上寫上數字，對他們是有意義的。透過學生自己的方法製造的尺以及讓他們解釋使用他們的尺所測量的結果，你會有豐富的評量資料，用以理解學生如何測量的過程。相較之下，如果你只是一步一步指導孩子們應該如何建構和使用他們的尺，他們完全可以很機械地使用，並沒有理解他們做了什麼。

把測量任務付諸於問題解決模式的教學，可以增加你的資訊來源。例如，你如何能對一個班級解釋你們的教室是多大或者你所製作的藍灰色大鬚鯨模型的尺寸？讓不同小組決定怎樣做並且進行測量。然後，比較結果，看看每一個辦法是否實際上轉達了意思。

使用直尺和捲尺

使用學生製造的尺來測量是重要的事。除了先估測再實測的活動外，第一次要求學生用尺來量，第二次利用實際的單位模型去量。雖然結果應該是相同，但是尺的不精確性或者不正確的使用，可能產生差異，值得去討論。同時，也要去量比尺長的物體之長度。

活動

16.6 更多的方式

- 挑戰學生去發現不同方法，利用一支尺測量同一個物體。（或許從端點開始量；或許選擇不是端點的其他點開始量；或許測量物體不同的部分，然後加總起來。）

捲尺測量，尤其用在物體周圍的測量，能夠以直尺相同的方法來作。例如以米的長度單位，曬衣繩能夠製作以米為單位的測量工具，繩子在每一米的地方畫記或以膠帶黏貼，或以可黏式標籤為之。

在製作簡單尺和捲尺工作以後，要求學生加上次單位或者分數單位，接下來利用兩個單位進行測量，如同上節所描述那樣。

但是，如果你們不轉移這個知識到標準的測量尺上，學生會失去製作尺的大部分價值。給孩子討論標準尺與自己製作的尺不同在哪兒？單位是什麼？你能否利用其他材料或方式製作相同的尺嗎？數字是什麼意思？另有一些記號是什麼？這些單位從哪裡開始？

第四節 測量面積

第六次美國NAEP測驗結果，顯示美國四年級和八年級的學生對面積概念不完全理解（Kenney & Kouba, 1997）。

比較活動

當比較兩個面積時，形狀導致困難而要長加思考，這並非在長度測量中

會遇到的困難。初期面積比較活動的目的之一是要幫助學生區分面積大小與形狀、長度和其他向度之間的關係。長長的、極扁的矩形可能比邊長較短的三角形有較少面積，這是年幼孩子們難以理解的概念。Piagetian 理論實驗證明，許多八歲或者九歲孩子無法理解，重新編排不同形狀的面積，並不影響面積總量。

兩個面積的直接比較幾乎不可能，除非它們的形狀涉及某種共通尺度或者性質。例如，能夠對相同寬度的兩個矩形直接比較；比較兩個圓的大小。然而，這些特別形狀的比較，並沒有處理面積的屬性。課程設計建議處理「等積異形」相同面積不同形狀，把一個圖形分解再組合成另一種形狀，瞭解面積是相同的。這個想法對於幼稚園到二年級學童是根本不明顯的。



16.7 二塊形狀

給兒童硬紙板做的矩形，並且在對角線上摺疊和切開，作成兩個全等三角形。其次，使他們重新排列三角形到不同形狀，包括原始矩形。規則是確切地使兩個三角形中等長的邊必須連在一起。使每一個小組發現作成所有形狀的方法，在一張紙上黏貼這些圖形，作為紀錄結果（參看圖 16.8）。討論不同結果圖形的大小和形狀：一個形狀比其餘的更大嗎？怎樣大？使用相同的數量的三角形去組合圖形？幫助孩子們推斷出，儘管每一個圖形的形狀不同，但有相同面積。（在此，對幼兒而言，以尺寸大小〔size〕代替面積〔area〕，雖然指的不是完全相同的事情。）

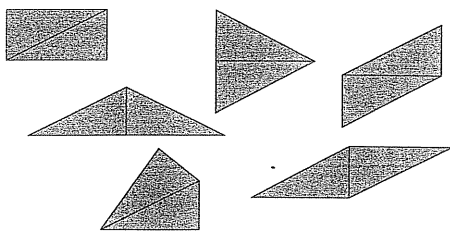


圖 16.8 不同的形狀，相同的大小

七巧板是一個很古老且令人迷惑的形狀組合，可以類似上述方式使用。

標準的七巧板是從一個正方形切割出來的，像是圖 16.9 顯示那樣。能夠用兩個小三角形來做出平行四邊形、正方形和等腰三角形；四個小三角形將製造一個大三角形。類似討論這些有相同的大小或面積不同形狀的圖形（*Seymour, 1971*）。

接下來的活動建議比較面積測量的方法。

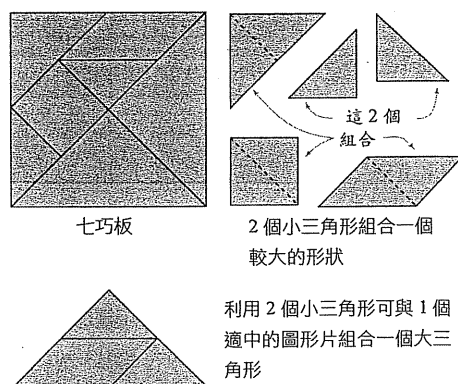


圖 16.9 七巧板提供一個好的機會，探究大小和形狀概念

活動

16.8 七巧板的面積

像圖 16.10 一樣畫幾個圖形的輪廓，它們是用七巧板構成的。讓學生用七巧板來決定哪些圖形是相同的大小？哪個比較大？哪個比較小？圖形都能在紙上複製。讓學生在小組裡工作，解釋他們如何發展到結論。有幾個不同方法去做這個活動，如果學生決定自己的辦法，而非盲目跟隨你的說明，這是最好的。你在這裡可以停下來，找到一套七巧板，進行面積的比較像圖 16.10 所建議。

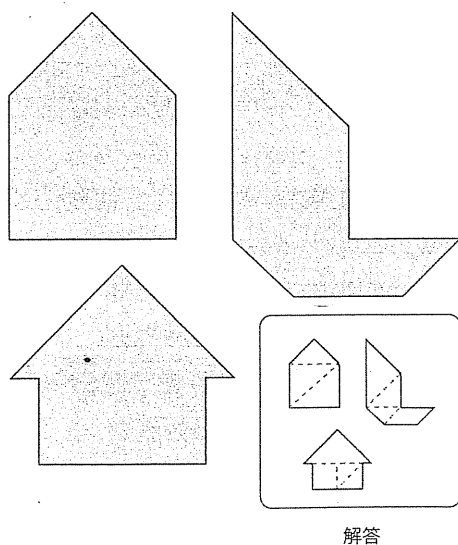


圖 16.10 七巧板的比較活動



16.9 填滿和比較

在紙上畫出兩個或三個圖形，並且複製它們。圖形可以是不規則或者熟悉的形狀（例如三角形、圓形或者矩形）。學生二人一組或小組活動，起初，完全根據形狀的觀察，決定何者是最大或最小；然後，他們發現一個方法判斷他們的原始估計是否正確。你可以建議比較的方法，或者你完全不提供方法，讓學生自行發明。

在活動 16.9 中你可注意到孩子們把哪種想法帶到面積的概念。在完全開放的方式中，你可以建議各式各樣的「工具」讓他們選擇，或者他們能夠用自己的方法，決定哪個形狀最大。例如，你能提供剪刀、1 英吋塑膠方塊、利馬豆、繩子、厘米方格紙、七巧板或者任何其他計數物或方瓦。不規定比較的方法，你將看到孩子當時面積概念的理解。

比較的方法包括用計數物填滿一個形狀，然後把這些相同的計數物移動到第二個形狀充滿內部，是否進入更多或者較少的計數物？另一個方法是要刪掉兩個圖形上下疊置的形狀和地方。一些孩子們可能考慮把一個形狀切成二個以上的塊狀，重新整理與另一個作比較。也可以在方格紙上計數圖形內的正方形。繩子不用於面積的比較，然而，用繩子可以比較形狀的邊界，課堂上實際上比較的討論，會很有幫助的。

使用面積的單位

雖然正方形是很好的單位（一般最常使用的），但是任何能夠方便地填滿平面區域的方瓦等，都可以使用。用相同的圓或者利馬豆充滿平面區域，也提供測量面積的一個有用想法。這裡提供一些建議，你需要容易大量蒐集

或者製造方便的面積單位。

使用卡片板切割正方形或者三角形（正方形的對角線），大的正方形或者三角形（一個邊大約 20cm）可做大面積的工作，較小的單位邊長大概 5-10cm。

一張報紙是大面積極好的測量單位。

告示板容易切成大量的適合方瓦成為較小的單位。包括 2×1 的長方形、等邊三角形和直角三角形以及正方形。這些方瓦可能一邊是 2-5cm。

樣式積木提供六個不同單位：六邊形、梯形、菱形和三角形，彼此關聯，與七巧板類似的模式。

撲克牌、索引卡片或者舊的商業卡片，都是中等大小的單位。

圓的塑膠晶片、一分硬幣或者利馬豆都能夠使用。在剛開始介紹面積單位使用時並不需要嚴格要求，排列出來中間會有空隙。

孩子們能夠用單位來測量表面積，例如教室中的桌面、布告欄或者書。大面積地區能夠使用膠帶在地板上畫出輪廓，體育館或者走廊都是大面積。小面積區域能先在紙上複製，學生才能夠在他們的書桌工作。奇特形狀和曲面提供更多挑戰和興趣，例如一個西瓜或者廢紙簍的側面表面提供有用挑戰。

當測量長度時，只有最後才有不完全適合的單位。但在面積測量中，也許僅有部分適合所使用的單位。你可能要裁剪圖形以適合所使用的單位。三年級或者四年級學生應該開始處理未滿一單位的部分單位，努力組合二個以上的部分，使變回一單位去計算（參看圖 16.11）。

你開始的目標是要發展概念是：「面積是覆蓋的測量。」不要導入公式，完全使學生利用單位去充滿形狀和計數所用到的單位。一定要在測量前先予估測（這比長度意義更為困難），使用近似語言，和以長度相同的模式討論精確度與單位大小的關係。小組很可能出現對相同的地區有不同測量。與孩子們討論這些差別，和涉及在角落區域估測方面的困難。避免有「正

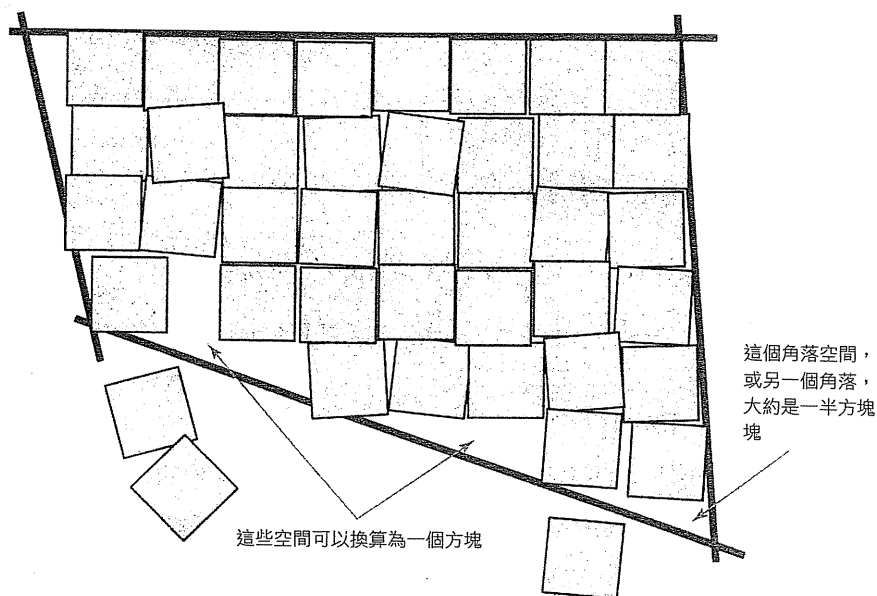


圖 16.11 在地板上用膠帶畫出的區域來測量面積，使用相同大小的單位方塊

確」答案的想法。

接下來的活動和活動 16.9「填滿和比較」類似。這有一些不同的是，要求學生不僅比較，而且用某種方式來排列形狀的大小次序。

活動

16.10 從小排到大

現有一系列完全不同的形狀而面積僅有一些些不同。首先讓學生預估形狀從最小到最大的順序，且記錄他們的預測。這任務是要他們用任何方法和單位來決定正確的順序。所謂「正確的」順序留給學生決定，因為不同方法可以導引班級討論會更有幫助。

下一個活動需要應用目前為止在面積發展的想法。

活動

16.11 同樣大小的矩形

你給學生一個圖形，要求學生做一個與此圖形同樣面積的矩形。給定的圖形也許是不規則形狀，或者也許是三角形，甚至矩形。做這個活動時，比較小的圖形可以畫在紙上，很大的圖形能夠利用粉筆畫在地板上。當孩子們在小組裡工作時，這個活動做得最好。班上的所有小組應該要給相同面積的圖形，但是在他們設計相同大小的形狀時並沒有給方向。每一個小組都將必然出現有不同大小的矩形甚至都有很好的解釋。小組必須解釋他們為什麼相信他們的矩形與給定的圖形相同面積。應該允許他們用他們希望的材料。在介紹面積公式之前，可以做這個活動。

使用方格紙

除了計算機製圖的設備，並沒有為測量面積設計的工具，方格紙也許可以叫做「面積尺」，正方形的方格紙確實與尺有相同的作用：它可為你展示單位。區域也能夠使用三角形方格。方格紙可以做成透明的，學生用這些方格紙的單位測量區域和計數方格。

活動

16.12 地板格紙

在地板上大的區域裡用膠帶做成兩條線像L尺，如同圖 16.12 顯示。在膠帶上，劃分出長度的適當單位，這兩條可解釋成在地板上想像有大方格紙的兩邊，可用來幫助視覺想像沒有畫出的正方形。大的形狀或者把其他平坦物放

置在 L 尺的角落適當的位置，
用以計算其面積。

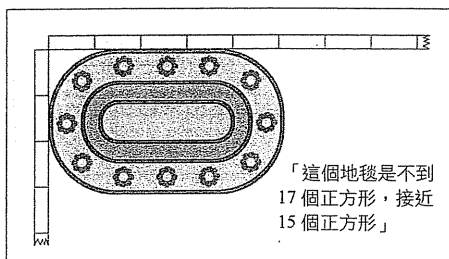


圖 16.12 在地板上以 L 尺作成測量大形狀
「面積的尺」

當然，最有用的方格紙是正方形，因為面積的多數標準的單位是從長度的標準單位得到的平方（平方英吋、平方厘米等等）。隨著用方格來決定矩形形狀的面積，許多學生會開始看出行和列的數字的乘積是計算面積的一個容易的方法。L 尺（也可以在紙上使用小形狀的圖形）提供暗示：兩邊的長度來決定面積。

第五節 測量體積和容量

體積（**volume**）和容量（**capacity**）都是對於三維區域的「大小」測量。體積的標準單位按照長度單位表達，例如立方英吋或者立方厘米。容量單位通常是適用於液體或者保持液體的容器，標準的容量單位包括夸脫和加侖、公升和毫公升。

比較活動

多數固體形狀和容器必須間接地比較，顯然能在容器之間最容易的比較是，把一個容器裝滿某物，然後倒到另一個容器裡。

年齡小的孩子們應該有較多經歷與不同容器容量做直接比較，蒐集罐

頭、小盒子和塑膠容器的分類，儘可能蒐集各種不同的容器；同樣，蒐集一些塑膠勺子。又把2公升的塑膠瓶子切成一半，用最高部分作漏斗，米或者乾燥的大豆是使用起來好填充的物品，沙子和水則是相當麻煩的。

活動

16.13 容量分類

提供一些已分類的容器，其中一個為「目標容器」。學生的任務是要將這些容器分類為容量比較少、比較多的或者與「目標容器」幾乎相同的，將分類結果記錄下來。在紀錄表上，每一個容器有兩欄記載。第一欄是要記錄由直接觀察的猜測，另一欄記錄檢驗的結果，提供填充物品（例如大豆或者米）、勺子和漏斗。避免清晰明確的指導做法，但是，稍後需討論學生解決這任務的想法。

活動

16.14 容量排列

給五個或者六個標明不同尺寸和形狀的容器，任務是從最少的體積排到最大的體積。它能夠完全被挑戰。不要提供答案，讓學生在小組裡工作，想一個辦法完成，並解釋他們是如何做到的。

像岩石、球、積木、蘋果或者茄子的固體比較，可以按照體積來比較，但是這更困難一點，必須使用取代的方法。一個方法是要使用一個容器，先放入某一固體物，然後用米裝滿，超過此物體後，在容器上作上水平記號，然後移走這個物體；再把另外的固體物放入容器中，必須埋入米中，再記錄其新的水平記號，依此類推。如果向學生挑戰設計自己的方法，提升活動的

問題解決導向的性質。

使用體積的單位

能夠用兩種類型的單位來測量體積和容量：固體單位和容器。固體單位是像能夠填滿測量容器的木製立方體或者舊的網球那樣的東西。另一類型單位模型是可以反覆填滿再倒到測量容器裡的一個小容器。下面是你可能想要聚集的單位例子。

頂針、塑膠帽子和液體的醫藥杯子都是有用的很小單位。

塑膠罐子和容器幾乎任何尺寸都能充當單位。

任何形狀的木製立方塊都是單位，只要有相同的尺寸。

塑膠包裝花生米、胡桃或者彈珠都能使用，即使它們沒有包裝地很整齊完美，它們仍然產生體積的概念性測量。

對於體積和容量的測量活動與那些為長度和面積所做的類似。體積的估測作為一個班級活動更好玩因為它們更困難。例如發現估測一個大紙板箱可以容納多少個相對地小的容器？可能是對於四年級或者五年級的一個極好的挑戰。在發展體積公式以前是應該要做到的。

當用只有一個立方體或者球的固體單位測量時，使用的困難是如何重複使用這唯一的一個單位去測量，不能夠像在長度或者面積做得到的。然而，一個值得挑戰的是要決定給單位，給得僅僅足夠的容器體積去鋪設底部。不要忘記非常大體積，如你的教室的體積，這個空間有多少個立方積木？在小組設計他們的方法並提供書面的解釋及圖畫去挑戰這個問題。

製作和使用測量杯

測量容量的工具通常使用少量的液體，或者適當的材料如米或水。這些

工具是在廚房和實驗室中一般找到的。如同用其他設備，如果孩子們自己製造，他們很有可能發展對測量單位及其測量過程更好的理解方法。

利用一個小容器用作單位以構成測量杯子。將作為單位的小容器裝滿大豆或米，然後倒入一個大的透明容器內，然後在水平位置作一個畫線記號；重複上述步驟，直到此大杯子幾乎完全裝滿，如此即可製造出一個測量杯了。如果所使用的測量單位較小，也許只需每 5 個單位標一記號，也不必在每個記號上寫數字。學生通常對閱讀沒標明有每個記號的尺度感到困難或者當每一個記號都表示得比一個單位多時。這是一個機會幫助他們理解在真實的測量杯子上面那些線的作用。

學生應該使用他們的測量杯子去測量容量，並且比較測量單位的容器，杯子很有可能由於不精確製造而產生錯誤。這是指出測量設備自己可能在測量中是錯誤的來源的一個機會。這個工具製造得更精確，則刻度會更精準，那誤差的來源會更少。

第六節 測量重量和質量

重量 (weight) 是在一個物體上，重力拉力或者力的測量。**質量 (mass)** 在一個物體中物質的數量和需要加速它的力的測量。在月亮上重力少於地球，相同質量的物體，在月亮上比在地球上有更小的重量。由於實用目的，在地球的質量和重量的測量將是幾乎相同。在本節討論中，術語「重量」和「質量」可交換地使用。

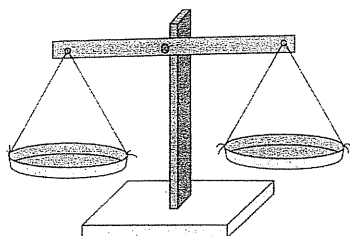
進行比較

兩個物體比較重量的最概念性方法，是伸展手臂提起重物，體驗相對向下拉的力量；這個方法對幼兒能有效溝通「比較重」或「稱起來更重」的意義。這種個人經驗能夠轉移到天秤和彈簧秤兩基本類型的秤。圖 16.13 展示

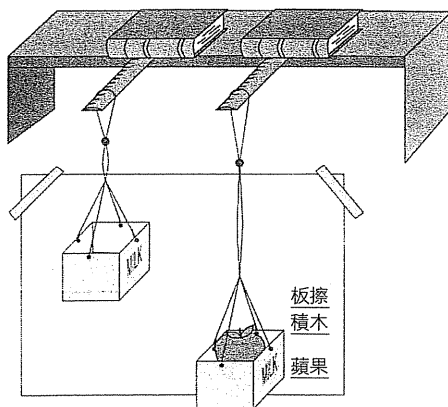
每一個自製的版本。二種簡單的秤皆可由學校的供應清單中取得。

首先孩子們應該用他們的手來估計兩個物體中哪個比較重。當他們把這物體放在天秤的兩個秤盤裡，下降的面板能夠知道哪個物體比較重，即使相對地簡單的天秤也將察覺細微的差別。如果在一個彈簧秤中放置兩個物體，一次一個，較重的物體會把這個秤盤拉下更多。天秤和彈簧秤在教室中各有其價值。（嚴格說來，彈簧秤測量重量，而天秤測量質量，為什麼？）

對幼兒使用任一類型的秤，去比較重量大小或排序，都是可能的；但對於年紀大的孩子，重量的比較活動就不必要。（為什麼？）



二個秤盤的天秤



橡膠繩（彈簧）秤
記號顯示不同物體拉下不同的長度

圖 16.13 兩個簡單的稱重工具

使用重量或者質量的單位

蒐集均勻物體能夠充當重量單位。對於很輕的物體，木製或者塑膠的小方塊是很好的。在五金店中找到大的金屬墊圈，稱稍稍更重的物體重量是有效的。當然，你將需要依靠標準重去稱一千克或者更重的物體。

在一個天秤中，把一個物體放在一個秤盤裡並且砝碼放在另一邊，直到兩個秤盤平衡。在一個彈簧秤中，首先把物體放下並在一张紙上標出秤盤的位置。移走這個物體然後將剛好足夠的重量置入秤盤使其拉至相同的位置。討論何以相同重量物體可以相同的力量拉這個彈簧或者橡膠繩？

儘管較重和較輕的概念學習得比較早，但重量或者質量單位的觀點是神

秘一點。在任何年級，儘管是非正式單位重量的一個簡短經驗都將是標準的單位和秤的很好預備。

製造和使用一個秤

大多數我們所使用於日常生活中的秤會產生數字，當把一個物體放在它其中或者在其上時。沒有可看見的單位砝碼，秤如何產生正確的數字？透過使一個秤不倚賴單位而給出一個數字結果，孩子們能夠看出秤如何做到。

學生能夠使用非正式重量單位和刻度像圖 16.13 那樣的一個簡單橡膠繩秤。安裝這個秤時有一張紙在後面，並且放置砝碼在秤盤中。每五個砝碼以後，在紙上畫記號。這結果的記號與標準的秤的刻度盤周遭的記號一致。秤盤充當指針。在刻度盤尺度中，秤盤的向下運動機械地使這個刻度盤轉動。這個活動的價值是看出稱重工具如何製造，即使是數字秤也是基於相同的原理。

第七節 測量角

由於兩個原因使測量角度產生困難：角尺寸的屬性經常被誤解了，並且介紹和使用量角器，但卻不瞭解它們是如何運作的。

比較角

角的大小的屬性可以說是「角的二邊張開的程度」。角由兩條射線組成，它的兩邊可任意延長，角的大小中，唯一的差別是兩邊張開得多寬或者多窄。

一些教科書讓學生思考一條射線從另一條轉動展開，能夠用末端聚在一起的兩個直尺來顯示這個想法，當使其中一個直尺轉動，看到角變得更大。

然而，當我們看角時，兩線已經是展開了，並沒有旋轉。你會把一個角看成是從一個邊轉到另一個邊嗎？

為了幫助學生將射線展開屬性概念化，兩個角可以從描繪其中一個到另一個位置上來直接比較，如同圖 16.14。一定要使學生把角與不同長度的邊比較，短邊的一個寬角好像比一個長邊的窄角小。這是學生通常的錯覺。一旦學生能夠講述一個大角和一個小角之間的差別，不管邊的長度如何，都能夠繼續測量角。

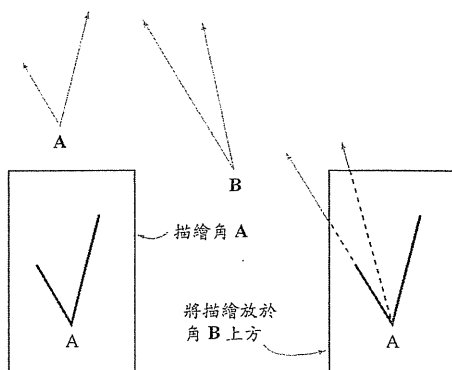


圖 16.14 哪個角比較大？將一個角描繪到另一個角比較

使用角測量的單位

測量角的單位一定是一個角，對於想要測量展開沒有其他相同的屬性。
〔與大多數意見相反，其實不需要利用角度（degree）來測量角〕

活動

16.15 一個單位角

給每一個學生一個索引卡或者一小塊標籤板，使學生利用直線在板上畫一個窄角然後切下來，此一楔形物即可作為角的測量的單位，在一個給定的角中計算有多少個單位角。在學習單上列出各式各樣的角分發練習，學生用他們的單位角來測量這些角度。因為學生建構自己的單位角，所以結果會有不同，可依照單位大小來進行討論。

活動 16.15 說明測量一個角是與測量長度或者面積相同。用單位角來填滿或者覆蓋一個角的張開範圍，就如同單位長度滿足或者覆蓋一個長度。一旦這個概念理解清楚，就能夠製作或使用測量儀器。

做量角器——量角器是根據角度的大小

量角器是一個在學校裡可以找到的最缺乏瞭解的測量工具之一，因為單位（度）的細微導致產生部分的困難。它實際上不可能去切割出一個單一單位度數使用、表達它，如活動 16.15。另一個問題是在量角器上沒有辦法展現可見角，只有在邊緣上有少許標記。最後，呈現量角器的編碼是有順時針方向和逆時針方向兩種。用一個量角器時，「我要使用哪個數字呢？」首先應該在量角器上標註比較大單位來使用，澄清上述迷思，然後再與市面上的標準量角器比較使用，如此才能有效瞭解此測量工具。

撕開大約一英吋的普通的蠟紙給每個學生，讓學生折疊紙一半並用力產生折痕，之後再折半使邊疊合，重複這個動作二次以上，每次產生折疊邊緣對齊後用力壓痕。剪或撕開產生半徑大約 4 或 5 英吋的楔形並展開，假如正確完成，則在中心周圍將會有 16 個角如圖 16.15，這個可以當作很好的量角器，有平角（180 度）的八分之一

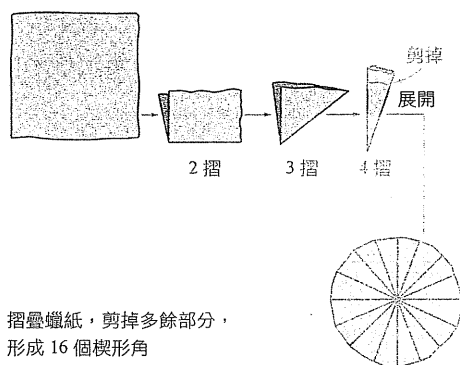


圖 16.15 製作一個蠟紙量角器（16 個楔形角）

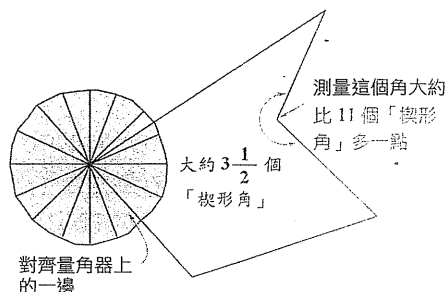
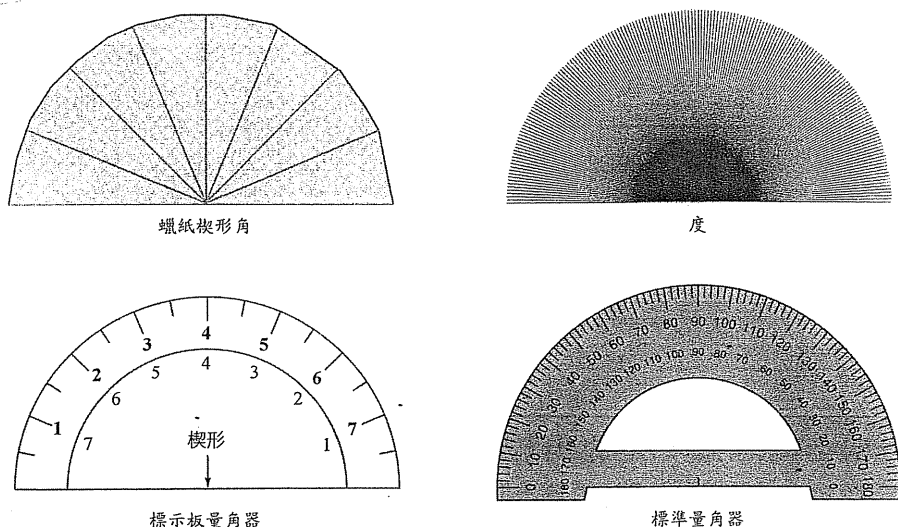


圖 16.16 用蠟紙量角器量多邊形的角

的單位角。它有足夠的透明度，可放置在紙上、黑板上、投影片上的角用來測量角度，如圖 16.16 所示，角的合理估計測量，可以使用蠟紙量角器如同在圖 16.16 所用的那麼小，在那個圖的量角器已經幫你量出任意多邊形的某一角。儘可能小心謹慎地使用蠟紙量角器測量這個多邊形的其他四個角，利用分數估測，全部五個內角總和應是非常接近 24 個楔形角。有二個可能的方法測量用箭頭指示的角，如果你的量角只有半圓而非完整的圓你要如何測量那個角呢？

這蠟紙量角器可以清楚知道量角器如何用單位角進行角的測量。當測量角時，學生能容易地估測二分之一、三分之一或四分之一的「楔形角」——這個非正式單位角的可能的名稱。這足夠準確去測量，譬如，一多邊形的內角與發現邊數與內角和之間的一般關係。對三角形而言，內角和是 8 個楔形角，記為 8^w ；對於四邊形而言，內角和是 16^w 。大致而言，一個 n 邊多邊形的內角和是 $(n-2) \times 8^w$ ，上標的 w 是未來角度符號 ($^\circ$) 的先驅者。

圖 16.17 說明半圓形的角度標示板如何用楔形製成量角器去測量角，這



標示在楔形角標示板的數字是編自蠟紙的放射角度；塑膠量角器則是對應角度的標示刻度，一度可以表示是一個非常小的角。

圖 16.17 「楔形角」量角器與單位角的比較

角度標示板有點接近是標準量角器，放射線條沒有向下延伸到頂點並在二個方向作標號，在這個量角器和標準量角器之間，單位角的大小是唯一的差別，標準的單位角是度（degree），那個有清楚地微細角的，標準的量角器在一度角的意義的教學上是不大有幫助的，但是在楔形角和度數之間以及在這二種量角器之間的類推卻是非常有效的方法。

第八節 介紹標準單位

如之前所指出的，用非標準單位來教測量方法有數個理由。無論如何，兒童熟悉一般常見的測量單位，和就這些單位進行估計，並可以用標準單位來詮釋、描述它們，這樣的測量感覺是需要的。

在測量教學中最大的錯誤大概是無法去確認和分別出二種目標類型：第一，瞭解測量項目屬性的意義與技術；第二，學習關於在測量那個屬性時一般使用的標準單位。這二目標可能是個別發展的，當企圖合併這兩個目的時，很可能會混淆。重讀在第二節說明使用非標準單位的理由列表，會明白你為什麼會使用它們。當學生感到一個屬性的測量是輕鬆的時候，他們就能注意物體像杯子和夸特容器；或是英呎制或碼制的英吋的數字；感覺公克和公斤。雖然兩種知識的領域都是重要的，且當計畫你的課程時它或許是有助於保持目標的區別。

教學目標

關於測量的標準單位的三個廣泛的目標可以分為：

1. **熟悉單位**：熟悉意指學生對經常使用的單位的大小及其要測量什麼應該有基本概念。沒有這種熟悉，測量的感覺是不可能的，知道1公升的水是多少，或是能夠估計一個架子為2公尺長，這種測量感要比有能力正確的去測量更重要。

2. **選擇一個適當單位的能力**：關於單位熟悉是在給予的情境中知道什麼是合理的測量單位，這個適當單位的選擇也是一件必須精確的事，（你會使用和測量一扇窗戶以購買一方框的玻璃一樣精確的測量方法，去測量你的草地以購買草種子嗎？）學生需要實際地運用常識在適當標準單位的選擇上。
3. **在單位之間一些重要關係的知識**：重點應保持在那些一般被慣用的單位的關係，諸如英吋、呎、碼或毫公升、公升，單調的轉換練習確實可提高一點點測量的感覺，但單位關係的目標是全部測量目標中最不重要的。

發展單位熟悉度

熟悉測量標準單位的重要性是被大多數的美國人民不願意（甚至害怕）採用公制系統所強調出來的，一般的成年人發展出日常生活單位使用的「感覺」：英吋、呎、英哩、磅、杯（半品脫）、加侖，這些習慣性單位並不比公制單位更易使用，但卻是他們熟悉的，反而公制單位不是，因此在兩種系統中以最常使用的測量單位幫助學生發展熟悉學習是一個重要的教學目標。

二類型的活動能幫助發展熟悉標準單位：(1)聚集單一標準單位的比較；和(2)發展個人對單一標準單位及其倍數的對照基準參照的活動。

活動

16.16 關於一個標準單位

給予學生一個標準單位的模型，要求他們尋找與此單位相同度量的東西。例如，要發展米的熟悉度，給學生一條1米長的繩子，讓他們尋找大約1米長的東西，然後列在紀錄表上。除此之外，也可分別記錄哪些東西比1米長？或短？或是兩倍長？或是一半長？鼓勵學生發現日常生活中熟悉的物件。又在量長度時，應包含像圓形的長度。最後，嘗試去做估測活動，預估一物體

是比 1 米長、短或一樣長。

用其他的單位長度也能夠完成相同活動。父母可以加入幫助學生找尋關於 1 英哩或 1 公里熟悉的距離，在親師建議信中提示他們檢查鄰近的距離，到學校或購物中心的距離，或沿著其他時常經過的路徑。

對於容量單位諸如杯（半品脫）、夸特和公升，學生需要一個容量為單一單位或有單位記號的容器，然後他們應在家中和學校找尋其他容量較多和較少的容器，要記住當估計它們的容量時，容器的外形有可能會是騙人的。

對於公克、公斤、盎司和磅的標準重量，學生能用天秤比較物體和這些單位的單一複製品，這時以 10 公克或 5 盎司或許能更有效執行。鼓勵學生從家裡帶來熟悉的物件在教室的天秤中比較。

標準面積單位就長度而言是平方公分或平方公尺、平方英吋或平方呎，所以長度熟悉是重要的。熟悉角度 1 度就不會和熟悉 30、45、60、90 度的一些想法一樣重要，Logo 的「海龜畫圖法」提供了熟悉度數很出色的途徑。（以簡單製圖能力而言，Logo 是一個非常容易的電腦語言，甚至一年級的兒童都能控制，這個語言在 17 章有更多完整的討論。）

第二種單位熟悉的方法是從非常熟悉的事物和使用參照或基準來測量開始：門口比 2 公尺多一點；一袋麵粉是 5 磅很好的參照；你的寢室或許大約是 10 英呎長；一個迴紋針大約 1 公克重而且約 1 公分寬；一加侖牛奶的重量略少於 4 公斤。

活動

16.17 常見的參照基準

對每一個你所關注的測量的單位，讓學生表列出至少五個熟悉的東西並用那個單位測量。以長度而言，鼓勵他們含蓋長、短的東西；以重量而言，則找出輕、重的東西，以此類推。測量結果的數值應該捨入為「好的」全數值。

在教室中討論表列可以分享不同的想法。

對長度而言，特別有趣的是發現在我們身體的度量基準。這些在過去成為很熟悉而且能像直尺般被使用在許多情境中，即使是幼兒也能很迅速地發展出來，這對於他們去認識他們周遭相似的長度是有用的。

活動

16.18 身體的基準量

測量你的身體，關於你的腳、步幅、手掌打開、手指寬、手臂伸展開、手腕與腰圍、腳到腰的高度、到肩、到頭部……有多長？你可能記不得這些，但某部分可證明是有用的基準量、某部分可能是很好的單一單位。（小孩子指甲平均的寬度約為 1 公分，而且大部分的人可以在他們的手掌找到約 10 公分的參考長度。）

為記住這些參照，他們必須在活動中使用測量長度、體積等單位對照基準比較去做估計測量。

選擇適當的單位

例如：測量房間應該是用英呎或英吋呢？稱實體積木重量應該用公克或公斤呢？回答這些問題比簡單知道多大單位要涉及更多的知識，雖然後者是一定要的。另一個牽涉到精確性需求的思考，假如你正為了剪裁飾板或合適的木製品而測量的你的牆壁，你將會需要非常精確地測量，這最小單位會是一英寸或一公分，而且你也將會使用到分數部分。但假如你正決定要買多少條 8 英呎長的長條，最接近的英呎應該是足夠了。



16.19 單位猜測

找出在報紙、招牌或其他日常生活情境中所有型態的測量例子。描述背景脈絡和測量，但不使用單位。這個作業是要要求學生預測要使用何種測量單位，讓學生討論他們的選擇。

發展單位間的關係

1 英呎有多少英吋？1 碼呢？或者是 1 夸特有多少杯？這些常常是要學生記住的資料類型。練習轉換是讓他們善於紙筆作業，這種單位換算熟悉的程序層面由於容易測驗而不需明白，在主要課程中已經過度練習。

許多學生可能知道 1 磅有 16 盎司，但當他們試著去決定 90 盎司是多少磅時他們卻不知道正確地使用，這個完全取決於對運算意義的瞭解。無論如何，簡單的常識是有幫助的，在這個例子，磅比盎司重，推理磅數比盎司數少的結論是合理的。

這慣用系統涉及一個繁雜多樣化轉換因素，而美國卻一直繼續使用它，老師將必須處理幫助孩子們記憶最常使用的因子。

在公制和慣用系統之間的正確轉換從未完成，從熟悉這些系統的立場，只要是生活在二個測量系統的國家中，則「柔性的」或「親切的」轉換是有用的。譬如：一公升是比一夸特「多一大口」；一公尺是比一碼「長一點」。對基準量而言這種相同是真的，一百公尺大約是略大於一個足球場前後距，或約等於 110 碼。

重要的標準單位

慣用和公制兩種系統包括許多日常生活中沒用到的單位，表 16.1（頁 610）表列的是美國最通用的單位。

公制單位

在美國熟悉大眾化慣用單位應是大部分標準單位教學主要的焦點。在學生發展小數符號的瞭解之前，先教導有非常好的關係的公制系統將會有少許優勢。相對於習慣性系統經常是混合單位的（3 磅 6 盎司，或 6 英呎 2 英吋），公制系統對每一種測量皆使用單一單位。去配合這個「規則」將意指那些不瞭解小數的低年級兒童，應該使用最小單位報告測量結果。譬如，一長度記錄為「235cm」而非「2.35m」或「2m 和 35cm」，這個規則對二年級有多重要也許可開放來討論。

在這公制測量課程中一個最壞的錯誤，大概是在小數記數法完全發展之前，要求學生「搬移小數點」去使一公尺單位轉換到另一種；被混淆的是，孩子們熟記關於在許多地方移動小數的規則，而且焦點變成規則和正確答案。

當孩子們開始去欣賞小數記數法的結構，這公制系統可以而且應該發展在七個地方：較小單位的三字首（deci-十分之一，centi-百分之一，milli-千分之一）和較大單位的三字首（deka-十，hecto-百，kilo-千）。用小數的知識與熟悉基本的和大眾化慣用單位，這完全的公制系統是容易學的。

在公制範圍內產生轉換有二個相關的方法，如同我們在第 14 章的圖 14.6（頁 503）所看到的，位值表給了七個連續位置的每一個公制名稱。假如瞭解小數點總是區別著單位值，則當給予任何公制測量，每個數字是以公制名稱表示數值，如果這單位名稱改變時，小數點即可移動。在測量 17.238kg 中，這小數指出 7 是在單位位值，符號「kg」指出那個位置名稱是公斤，因此，2 是在一百公克（hectogram）位置，3 在十克（dekagram）位置，和 8 在公克（gram）位置，改變小數成為公克表示的單位，相同的測量則讀成

表 16.1 美國常見的測量單位

	公制的系統	慣用的系統
長度 (Length)	毫米 (millimeter)	英吋 (inch)
	公分／厘米 (centimeter)	英尺 (foot)
	公尺／米 (meter)	碼 (yard)
	公里／千米 (kilometer)	英里 (mile)
面積 (Area)	平方公分	平方英吋
	平方公尺	平方英尺
		平方碼
體積 (Volume)	立方公分	立方英吋
	立方公尺	立方英尺
		立方碼
容積 (Capacity)	毫公升 (milliliter)	盎司 (ounce) *
	公升 (liter)	杯 (cup)
		夸脫 (quart)
		加侖 (gallon)
重量	公克 (gram)	盎司 (ounce) *
	公斤 (kilogram)	磅 (pound)
	公噸 (metric ton)	噸 (ton)

* 16 盎司重量等於 1 磅；8 盎司的容積等於 1 杯（半品脫）。

17238g 或 17238.0g。

一個相互轉換的基本理由是思考小數點改變就像以 10 的次方相乘或相除。在我們的例子中，由於 1 公斤有 1000 公克，經由乘以 1000 轉換成公克，或小數向右移三位。

再次強調單位轉變大概是學習公制或任何標準系統中最不重要的部分，在美國，它只是日常生活並不常用的一種技能。

慣用系統

這個「熟悉的」單位系統可以認定為是美國的慣用系統，在 1970 年代

試圖完全公制之後，多數的學校和教科書已經接受它們自己的主張同時去教公制與慣用系統兩者。

對美國兒童而言在慣用系統內單位的轉換是困難的有二個理由：有更多轉變的比率要去熟記；而且它們並不能有利於對十進制的連結。譬如，許多孩子們將 5 呎 6 英吋加 3 呎 8 英吋認為是 9 呎 4 英吋而不是 9 呎 2 英吋。（為什麼呢？）類似的困難發生在慣用系統的所有轉換上，再一次看到，這時候知道一呎有多少英吋和一些其他的普通關係是重要的，過分強調轉換在慣用系統仍是不當的。

第九節 估計測量

估測是使用心算和視覺資訊進行測量與比對而不使用測量工具的過程。它是實用的技能，幾乎每天我們都在進行測量的估計：例如我有足夠的糖去製做小餅干嗎？這個位置適合汽車的大小嗎？你能把球投 50 呎嗎？這個手提箱超重了嗎？這柵欄大約多長呢？這張紙足以包覆這盒子嗎？這些每個都涉及估測。

除了它在教室外的價值，在測量活動時，估測可以幫助學生去注意要測量的屬性，增加本質的刺激，和幫助發展熟悉標準單位。因此，測量估計同時改進了測量教學並且發展一種有價值的生活技能。

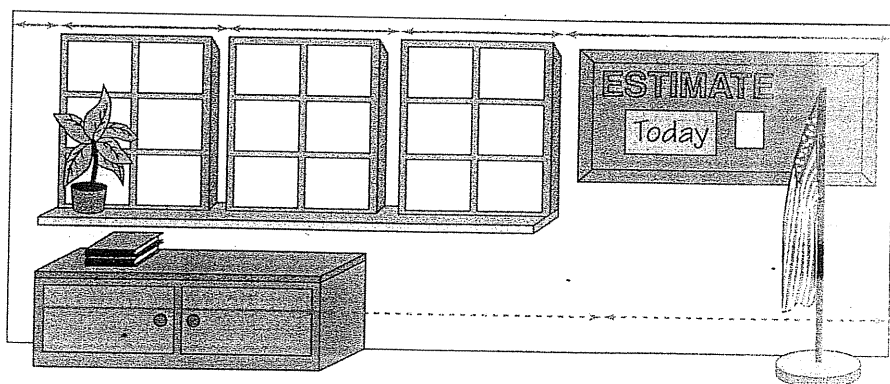
估測的技術

就如計算的估算一樣，估測也存在特定的策略，四種策略可以具體的施教：

1. 對重要的單位發展和使用基準或參照：這個策略也同樣用於發展熟悉單位。學生對單一單位應該有一好的標示物，並且對此單位有一些有用的倍數單位，例如，以 1 磅單位而言，1、5、10、100 磅為參

照或基準量可能是有用的；以 500 毫公升為一個參照是非常有用的。這些基準量能促使心理上的比較去形成物件的估計：「那個樹木大約是四個門那麼高，或是 8 到 9 公尺高。」

2. 適時的使用「組塊」(Chunking) 基準參照：圖 16.18 是一個例子，延著牆壁估計參照的「組塊」數目，要比估計這整個長度可能會更容易些；假如能得到一本書的平均估計值，則要估計這一堆書的重量就會更容易。
3. 使用再細分：這是一個類似「組塊」的策略，經由估計者加諸大塊在物件上，譬如：假如估計牆壁長度時沒有可用的大塊，可以用心理上的視覺想像切割，經由平分成一半然後四等分或甚至八等分……重複的平分直到達成一個容易判別的長度為止。長度、容積和面積測量都可用這個技術。
4. 重複心理上或身體上的單位：長度、容積和面積有時後容易在視覺上標記單一單位，當你進行測量時你可以使用你的手或製作標記或折疊去保有思考的軌跡。以長度而言，使用身體當作單位且反覆測量是特別有用的。譬如假如你知道你的闊步大約是 $\frac{3}{4}$ 公尺，你能走



估測房間長度

利用：窗戶、公告欄等作為「組塊」

利用：矮櫃長——看起來有 3 個矮櫃長多一些

圖 16.18 利用「組塊」估測

完一個長度然後相乘去得到估計值；對於短的測量，手和手指寬度是有用的。

估測教學的秘訣

以上列出的四個策略應該直接地施教並且和學生討論，但是達成改進估測的最好技能是，讓學生實做大量的估計。在心中記住下列提示：

1. 協助學生學習策略，要求他們有具體明確的說明，在後續的活動應該允許學生選擇任何他們希望的技術。
2. 定期地討論學生形成他們的估測是如何的不一樣，這將幫助學生瞭解沒有唯一的正確方法去進行估計，也提醒他們不同的方法是有用的。
3. 接受估測的範圍。思考關於什麼是一個好的估計，對長度而言在 10 個百分點範圍內是相當好的；對重量或體積而言，甚至差距 30 個百分點或許都是合理的了。
4. 有時要求學生給一個包括實際測量的區間範圍，這在真實生活中不只是一個實際的方法，而且可以幫助對估計的近似值之本質上的注意。
5. 讓學生用實測去檢驗估測。無論如何，假如教學焦點是在估測，那只要一、二小組實測即可，否則，假如全部學生每次都被要求要用實測去支持他們的估計，他們可能會煩何必去做估測呢？
6. 讓測量估測形成一個持續不斷的活動。每日測量估計公布在布告欄，學生能把估計寫在紙上並用五分鐘的時間討論它們，大一點的學生甚至可以小組分工的方式，每星期給予進行事物估測的工作。
7. 儘可能地去考慮所有屬性的估測。它容易讓人記住長度之估測，而忘記了面積、容積、重量和角度。

測量估計活動

估測活動不需要是詳盡的，本章中任何測量活動都能有一個「優先估測」的要素。為了更重視估測本身的過程，要注意哪些東西可被估測，並且讓學生估計。這裡有一些建議：

活動

16.20 快速估計

選擇一個單一物件，像盒子、西瓜、罐子，甚至校長，每天選擇不同的屬性或向度去估計，例如西瓜，學生可以估計它的長、圍長、重量、體積和表面積。

活動

16.21 估計探究

引導測量探究，提供小組一張測量表，讓他們找出接近表列的事物，不准使用測量工具，這張表可包含下列項目：

一個 3.5 公尺的長度。

比 2 公斤多但比 3 公斤少的東西。

一個大約 200 毫公升的容器。

讓學生提出如何去判斷答案的正確性。



16.22 E-M-E 順序

運用「估計—測量—估計」之順序 (estimate-measure-estimate sequences) (Lindquist, 1987a)，選擇幾對和度量單位有關或接近但都不相同的東西去測量，讓學生估計第一件東西的量，並透過實測來檢驗，然後讓他們估計第二件東西，底下有幾對例子：

- 扇窗戶的寬度、一面牆的寬度。
- 一大杯咖啡的量、一個水壺的量。
- 二眼的距離、頭的寬度。
- 一把彈珠的重量、一袋彈珠的重量。

活動 16.22 能幫助生瞭解如何使用估測中的參照基準物。

第十節 發展公式

通常測量和幾何學在教科書中是一起呈現的，在數學的這二個領域之中的關係，幾何圖形測量公式的發展是最明顯的。公式幫助我們利用簡易的測量，去間接地決定其他不是那麼容易發現的測量。譬如，用直尺測量盒子的三維是容易的，但實際測量這相同盒子的體積是不容易的，經由使用公式，從長度測量便可決定體積了。

沒有參與那些公式的發展形成過程，兒童不應該使用公式，面積和體積公式應該全部由孩子們去發展形成。發展形成公式和察覺它們如何關聯，是比盲目地填數字到初級單調的計算公式裡更具深遠意義。

常見的困難

使用很多公式和規則，卻完全遺忘公式和規則的理解，讓許多孩子們感到阻礙困難。

過分重視公式

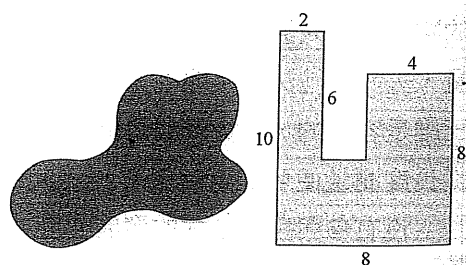
在美國第六屆 NAEP 測驗中，學生被要求在方格中描畫一個面積是 12 平方單位的長方形，正確回答的四年級有 42%，八年級有 66%；當問到長 9 英呎、寬 6 英呎的地毯的面積時，同時這些年級正確回答的分別是 19% 和 65%，多數四年級學生選擇這個尺寸的加總（15）當作他們的答案；八年級的成績和畫 12 個正方形單位的矩形是一致的但是並不穩定（Kenney & Kouba, 1997）。

這個評量中的許多類似項目和早期 NAEP 的研究指出，學生應用面積測量公式經常是有困難，而且面積和周長的公式常常混淆。最有可能的解釋是太早強調公式而甚少發展進行為什麼公式是這樣執行的瞭解探討。

在圖 16.19 的作業不能以簡單公式解釋，它們需要一個觀念和公式如何運作的瞭解，「長乘寬」不是面積的定義。

高或邊

當學生使用公式另一個常見的錯誤，是利用不正確的幾何圖形高的概念，包括平面上和空間中的。在圖 16.20 的圖形每個都有斜邊和一個高，學生容易混淆這二者。任何圖形的邊或平面可以是稱作圖形的底，每個圖形具有的底都有一對應的高。圖形上的高是指相對應的



「你如何求這些形狀的面積？」

注意：許多孩童認為這類圖形沒有面積，或者它們不可能去求出面積，因為沒有公式可運用。

圖 16.19 認識面積的屬性

底之垂直距離。孩子們有許多長乘寬之長方形公式的早期經驗，在那裡高恰好和一邊的長相同，這大概是混淆的原因。

在公式引入被討論過的高之前，孩子們應是有能力識別圖形所有的底，而能測量它對應的高。

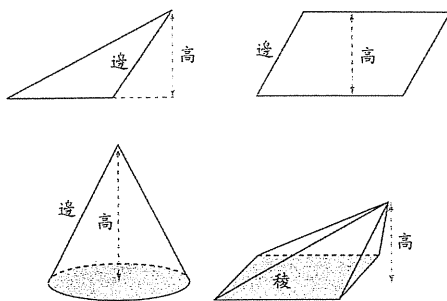


圖 16.20 圖形的高未必是延著邊或表面來測量的

矩形、平行四邊形、三角形和

梯形的面積

面積公式的發展是一個極好的機會去遵循NCTM《2000年原則和標準》的精神。首先，一個問題解決導向的教學方法，能有意義地讓學生參與和幫助他們察覺數學是一種形成感覺的努力；其次，數學的連貫是明顯。這裡你將看到所有標準的面積公式是緊密相關的，並且可以一起整體發展和學習的，而非僅是孤立零散事實的蒐集。

矩形

矩形面積公式是第一個發展的而且通常是寫成 $A = L \times W$ （面積等於長乘寬）。往下續看其他的面積公式，一個等價但卻更一致的想法可能是 $A = b \times h$ （面積等於底乘高），底乘高公式可以適用於全部的平行四邊形，而且在發展三角形和梯形的面積公式是有幫助的。此外，這相同的方法可以延伸到三維空間，圓柱體體積可由底面積乘高得到。底乘高，幫助連接其他必須單獨熟練的公式的大家族。

接下來連續的練習去發展在圖 16.21 所說明的長方形面積公式，用問題解決的精神處理連續的每一步驟：我們是如何能算出這個的呢？

1. 讓學生決定描繪在方格紙或幾何板上的長方形的面積，或讓學生描

畫有明確面積的長方形（但
是不標示出長和寬），有些
人可能計數每一個正方形；
其他的可能以乘法算出所有
的方塊數。

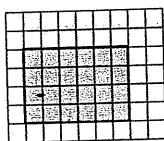
2. 不在方格紙上檢查長方形，
而以整數的長寬尺寸來看。
指定一邊為底，並延著這個
邊排列單位正方形，則會有
多少列能符合這長方形呢？
在相同的長方形上，用其他
的邊為底重複這個方法。

3. 給與學生只有長與寬的矩
形，並讓他們測量面積，要
求他們去證明他們的結果的
合理性，鼓勵類似於步驟 2
的方法。

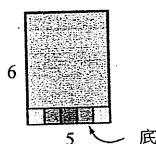
4. 檢視尺寸不是整數的矩形。假如底是 $4\frac{1}{2}$ 單位，則 $4\frac{1}{2}$ 單位的正方形
將恰好填滿底；假如高是 $2\frac{1}{3}$ 單位，則每排 $4\frac{1}{2}$ 正方形有 $2\frac{1}{3}$ 列，或
 $2\frac{1}{3}$ 組的 $4\frac{1}{2}$ 。

從長方形到平行四邊形

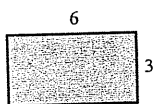
一旦學生瞭解長方形的底乘高公式，這下一個挑戰是去測定平行四邊形的面積。不提供公式或其他的說明，就像讓學生在方格紙上或一張白紙上畫矩形一樣，他們的工作是去發展一個他們可使用於任何平行四邊形的面積方法，而不只是用於現在這一個。假如學生遇到了瓶頸，則要他們以下列的方式檢視：平行四邊形就像長方形一樣，或它能如何轉變為長方形的。如圖



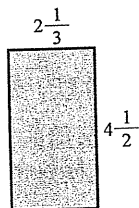
面積可以經由計算小方格算得



以 5 格方格為底，高度是 6，
可視為 6 列底



說明如何判斷出長方形中
 1×1 的方格數，你能用二
種方式來操作嗎？



選一邊當底，有多少的方格可
填入這個底呢？在這個長方形
又有多少列呢？

圖 16.21 判斷長方形的面積

16.22 顯示，一個平行四邊形經常是可以轉變到長方形，而有相同的底、相同的高和相同的面積。因此平行四邊形的面積公式是確切與矩形相同為：底乘高。

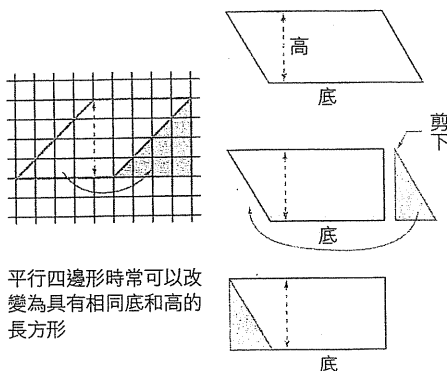


圖 16.22 平行四邊形的面積

從平行四邊形到三角形

在探索三角形面積之前，瞭解平行四邊形公式對學生而言是很重要的，有那樣的背景，三角形的面積是相對地簡單。

如同平行四邊形，學生應被要求用同樣可以應用到全部三角形的方法去描述三角形的面積。他們能在方格紙或幾何板上探索三角形的面積，就如同平行四邊形一樣。作為公式發展的一個暗示，讓學生將一張紙折半，畫一個三角形在這折疊紙上，並剪下來，產生二個一樣的複製品，提示他們試著去使用這二個三角形去構建一個他們已學會的面積公式的圖形。

如圖 16.23 顯示，二個一樣的三角形總是能排成一平行四邊形的樣子，具有與這三角形相同的底和高，這三角形的面積將因此是剛好等同平行四邊形的一半。讓學生更進一步探索全部三種可能的平行四邊形，以每一個三角形的邊為底，估算的面積都會一樣嗎？

從平行四邊形到梯形

在發展平行四邊形和三角形公式之後，你的學生可能對沒有任何更進一步協助下處理梯形而感到興趣。（見圖 4.1，一個完全開放的挑戰例子）有幾個形成梯形公式的方法——每個都與平行四邊形或長方

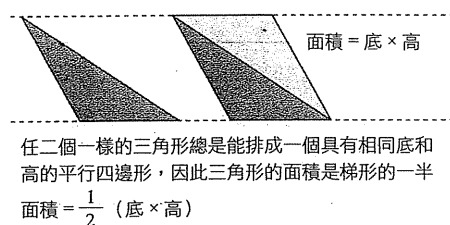


圖 16.23 二個三角形做成平行四邊形

形的面積有關。一個最好的方法是使用與用於三角形相同的一般方法。提示學生試著操做二個完全相同的梯形，就如同他們在操做三角形一樣，圖 16.24 呈現這個方法是如何引導出公式的。現在，這並不只是這些公式所有的連結，更可以用類似方法來發展它們。

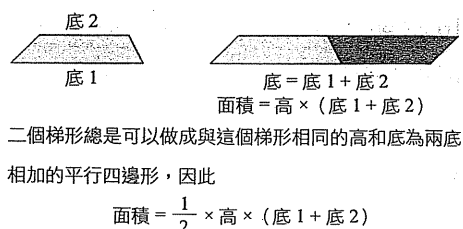
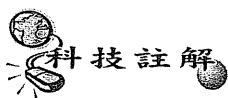


圖 16.24 二梯形做成平行四邊形

(你認為應該教導正方形面積的特別公式嗎？什麼是周長公式呢？)



矩形、平行四邊形和三角形面積之間的關係，使用像 *Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press, 1995) 或 *Geometry Inventor* (LOGAL, 1994a) 的動態幾何程式可能有戲劇性地圖解。分別在二平行線上畫二個一樣的線段，如圖 16.25 所顯示的，然後連接這線段的端點去形成一個平行四邊形和二個三角形，在二平行線之間且垂直二條線的線段形成高，二線段的任何一個都可以不改變底或高向左或向右延伸去「轉向」成為平行四邊形和三角形，全部面積測量就僅剩下整理了！

圓形公式

在圓形的周長（周圍環繞之距離）和直徑的長度（連接圓上二點通過圓心的直線）之間的關係是孩子們所能發現最有趣的一個。每一個圓的

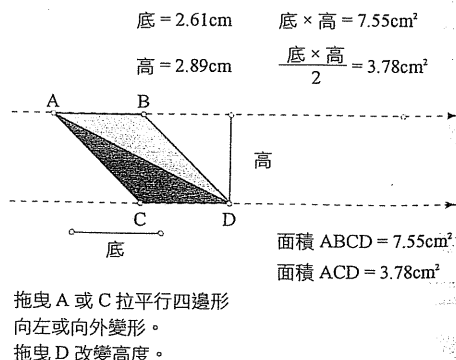


圖 16.25 動態幾何軟體顯示同底同高的圖形面積相等

周長大約是直徑長的 3.14 倍，那個正確的比率是一個接近 3.14 的無理數，並且用希臘字 π 來表示，那麼 $\pi = C/D$ ，即圓周長除以直徑，稍微不同的表示是 $C = \pi D$ ，直徑一半是半徑 (r)，那麼相同的等式可以寫成 $C = 2\pi r$ 。(第 17 章將詳細討論 π 的概念和學生如何能發現這重要的比值。)

圖 16.26 呈現了一個面積公式 $A = \pi r^2$ 的論點，這個發展是在教科書裡一個普遍的發現。另一個非正式的證明是根據圓的內接多邊形的邊數不斷增加使其儘可能去接近圓的想法。(在正多邊形和圓形之間的關係用 Logo 畫圖是容易知道的，對於它們，這個求圓面積的方法可能是特別有魅力的。)

不管你使用什麼方法去發展面積公式，學生應是挑戰自己去算出它。假

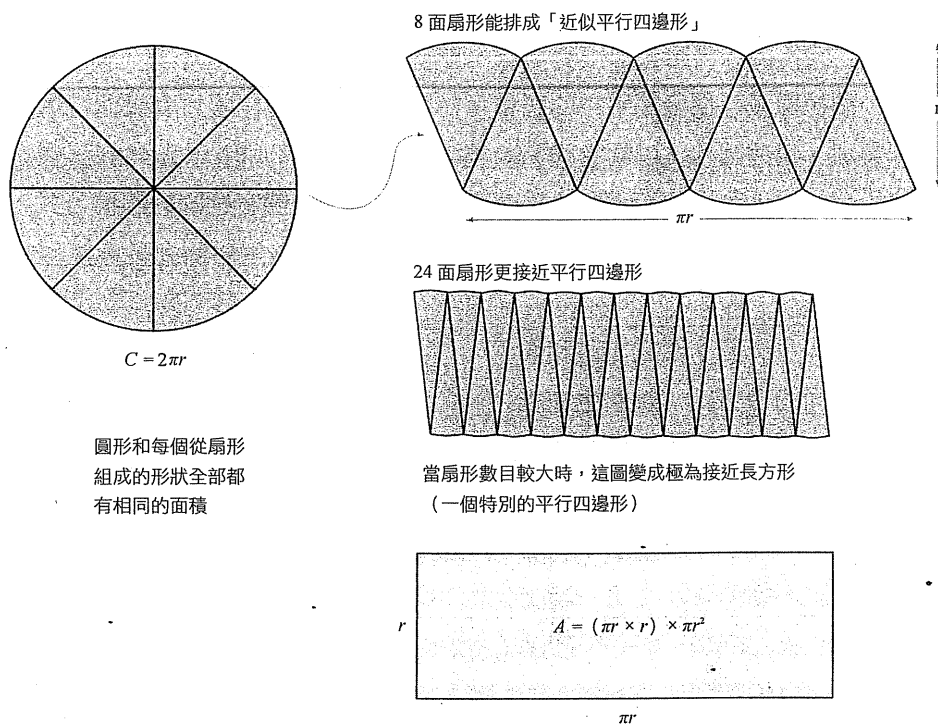


圖 16.26 圓面積公式的發展

定你顯示學生如何整理圓的 8 個或 12 個扇形成為一近似平行四邊形，他們的工作應該是去使用這個來暗示朝向圓面積公式發展，你可能需要幫助他們察見扇形的處理是一個近似平行四邊形，而且更緊密的最小的扇形處理會得到一個長方形，但是對這公式的完美論證應該來自你的學生。

一般立體的體積

體積公式之間的關係是完全類似那些面積，如同你讀到的，注意長方形和柱體之間相似的地方，平行四邊形和平行「傾斜」柱體之間，以及三角形和角錐之間，不僅是公式相關，公式的發展過程也是類似。

柱體的體積

一個柱體是二個全等平行的底和互為平行邊組成的柱體，有幾個柱體的特殊類別，包括圓柱（以圓為底）、角柱（以多邊形為底）、正角柱、長方角柱和立方體（參閱第 17 章），有趣地，所有這些立體有相同的體積公式，而且那一個公式是類似平行四邊形的面積公式。

提供學生一些木製立方體和像立方體正面的方格紙，讓學生在紙上描畫一 3×5 的長方形，並且在長方形上放置 15 塊立方體製作一個高度為 1 單位的盒子，這個盒子的體積是 1 乘底面積，現在在第一層上放置第二層的立方體，高是什麼？體積呢？繼續增加到 5 或 6 層（如圖 16.27），對每個新的一層，察覺總數是底層立方體個數乘以層數，底層（或任何層）的數量就是這個

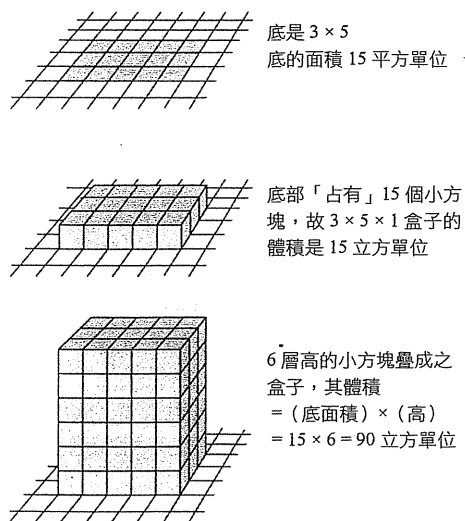


圖 16.27 柱體的體積

底的面積，層數就是高，因此，這立體的體積是 $V=A \times h$ ，底面積乘以高。

回憶長方形面積公式是如何發展的（參閱圖 16.21，頁 618），並注意那個發展與體積是如何地相似，取代底的長度 \times 高（以長方形的面積而言），在三維中，相對圖形的體積公式是底的面積 \times 高。

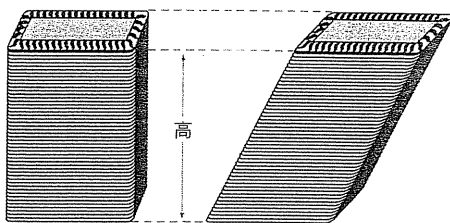


圖 16.28 同底同高的兩柱體，體積相同

回憶平行四邊形能想成一個「傾斜」的長方形，如同用動態的幾何軟體圖解（圖 16.25，頁 620），顯示學生一疊三或四層的紙牌（或一疊書或紙），當筆直地堆疊時，它們形成一長方體，它的體積，就如同剛剛討論的，是 $V=A \times h$ ，其中 A 等於一張牌的面積。現在假如堆疊是轉向傾斜到一邊如同圖 16.28 顯示的，這個新圖形的體積將會是什麼呢？學生應當會爭辯這個圖形有著和原紙堆相同的體積（和相同的體積公式）。

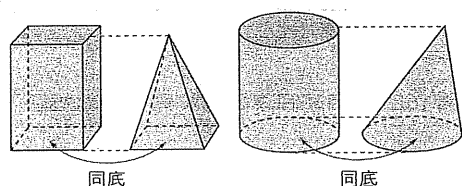
如果這個活動的紙牌是另外的形狀又會怎樣呢？假如它們是圓形，這體積將還會是底面積乘以高；假如他們是三角形，仍然相同。結論是任何柱體的體積等於底面積乘以高。

圓錐和角錐的體積

正如在平行四邊形和三角形之間有很好有的關係，在柱體和錐體之間也有一個類似的關係存在。

幫學生製作相同高和底的木板柱體和角錐（這些相關圖形的塑膠模型可以購買），打開每個底，準確摺疊的摺線記號，一正四角錐和角柱的長寬高如圖 16.29（頁 624）。讓學生以適當的角柱估測角錐，然後讓他們用豆子或米粒填充角錐並將它倒到角柱裡來檢驗他們的預測，他們將發現正好 3 個角錐可填滿相同底和高的角柱。（另一個方法是謹慎地用黏土做出二者模型並比較它們的重量。）

不管底的形狀或頂點的位置，只要相同的底和高，體積的比都是 3 比



角錐或圓錐是相同底與高的角柱或圓柱體積的 $\frac{1}{3}$

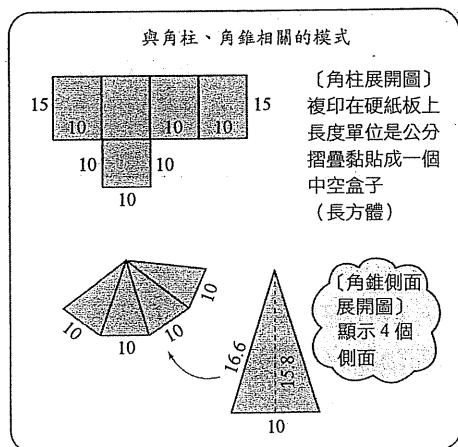


圖 16.29 比較角柱與角錐和圓柱與圓錐

1。也就是，對任何圓錐體或角錐 $V = \frac{1}{3} (A \times h)$ ，回憶相同底和高的平行四邊形和三角形，它們的面積比是 2 比 1，相對於面積是二維的圖形，體積是三維的圖形；更進一步，三角形之於平行四邊形如同角錐之於角柱。

第十一節 測量時間

用測量其他屬性的相同方法測量時間：一單位的時間是被選擇和使用當作「填滿」時間來測量，時間可能讓人聯想成一個從我們開始到結束的事件的期間（duration）。一個非正式的時間單位是鐘擺搖擺的週期，水龍頭滴下的不變水滴，或是在二定點間運動的太陽陰影（如同日晷）。測量時間，時間的單位是當活動測量時同時開始（「定時」），而且計算到活動結束，因此譬如鐘擺的擺動，被「調適」為小孩子寫下他的名字的時間期，小孩子們喜愛以非正式的單位計時事件，大孩子們能體會時間的測量，就像類似其他屬性的測量過程並且如此將所有測量一般化。

報讀時鐘

報讀時間，用時間測量來看，只有一些概念的做法。報讀時鐘的技能與讀任何在數字刻度上使用指針的儀器技能是相關的。教低年級讀時鐘是一種困難的技能，幾乎每個人在中高年級還依然要學習辨別時間。

某些困難

小孩子們讀時鐘的問題可能源自於課程，孩子們通常首先被教到讀時鐘的整點時刻，然後一半和四分之一小時，和最後到 5 分鐘和 1 分鐘。在這個連續的早期階段，孩子們確切地顯示出小時或半小時的時鐘狀況，許多孩子們能讀出時鐘位置是在 7:00 或 2:30，但不瞭解在 6:58 或 2:33 的時間。

數字顯示的時鐘可讓學生很小就可以在無關時間概念下容易地讀時鐘。要知道 7:58 數字報讀是接近 8 點鐘，兒童必須知道一個小時有 60 分鐘，58 是接近 60 的，而且 2 分鐘不是一個非常長時間。多數一年級和許多二年級的兒童們並沒有發展出這些概念，指針的時鐘顯示「接近」某一時間並不需要瞭解大的數字甚至在一個小時有多少分鐘。

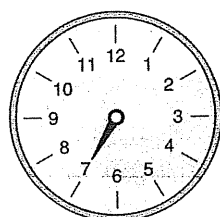
更進一步，報讀時鐘的標準方法並不去管二個指針明顯不同的動作和功能，短針指出一個範圍，大概的時間（最近的小時），和長針指出一個小時之前或超過的時間（分鐘）。當我們看時針時，我們聚焦在它的指示，結合分針，注意的是已經過了的時間距離或指針返回到起點的距離。

建議的方法

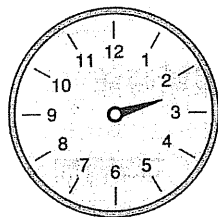
下面的建議能幫助學生瞭解和報讀指針時鐘：

1. 利用單一指針時鐘開始，一個僅有時針的時鐘能合理正確的報讀，使用許多大概的語言：「現在大概 7 點鐘」，「現在是 9 點多」，「現在是 2 點和 3 點的一半」（參閱圖 16.30，頁 626）。

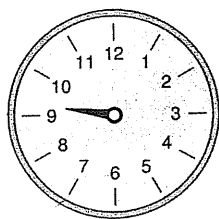
2. 討論短針走到下一個小時之間，長針發生了什麼變化。
當長針在 12 時，時針是精確地指著數字，假如時針大約在數字之間的一半位置，分針將會在哪裡？假如這時針走過去一點或在一個小時（10 到 15 分鐘）之前，分針將會在那裡？



大約七點鐘



在二點鐘和三點鐘的中央



稍微超過九點鐘

3. 使用二個真的時鐘，一個有長短二針和另一個只有時針（從一個老時鐘拆除分針）替代二支指針的時鐘，在一天的時間期，注意只有一個指針的時鐘，用大概的語言討論時間，讓學生預測分針應該會在哪裡，揭示另一個時鐘並核對。
4. 在小時之後教 5-分鐘。於步驟 3. 開始後，以 5 個一數計算時鐘，一改預測，讓分針是指著這 4，鼓勵學生去說出大約這小時過了 20 分鐘，如同技能發展，建議學生要先看短針或時針到得知大概是幾點鐘，然後再注意求更精密的分針。
5. 當顯示一個指針的時鐘時能預先報讀數字鐘；反之亦然，當顯示一數字鐘時能呈現指針時鐘的狀態。這個能用單一指針和長短指針的時鐘來完成練習。

圖 16.30 用單一指針大致估計時間

教學用時鐘

使用投影機的簡單時鐘能容易地用三張紙製作，其一，描畫一個沒指針的簡單時鐘樣子，在中心剪一個小洞，並從背面插入一個銅扣，讓扣件筆直的向上伸出。從其他的紙張剪二個圓，這圓的半徑應該和這時鐘的時針與分

針相同，在這些圓的中心剪小洞，並在每個圓從中心到圓的邊畫一個時鐘的針，假如你在銅扣上只滑動較小的時針，你就有一非常好的單一指針的時鐘。對二支指針的時鐘，在第一層放置較大的圓。

使用你上面的時鐘練習單一指針時鐘的報讀，強調大概的語言，調整短針在時鐘的不同地方，並暗示孩子們如何去讀出它，讓學生調整時針為 5 點半或快到 8 點。

相關概念

學生也需要學習關於秒、分和小時，並發展這些單位有多久的概念。你可以讓學生感覺並注意到一天中事件的長短來幫助學習，計算 $\frac{1}{2}$ 分鐘到 2 分鐘的小事件的時間是有趣且有益的，電視節目和商業廣告是一好的標準，讓學生在他們的日常生活中計時熟悉的事件，例：刷牙、吃晚餐、搭車上學及集體閱讀所花費的時間。

當學生學習更多有關二位數的數字，整點過後的時間也會與整點之前有關，這個不僅有助於報時，對數感也有幫助，注意那個連續不斷的連想，特別強調超過整點之後的時間，在整點之前的時間表示即將到來的時刻。

問題解決的練習諸如：「假如在 7:30 時比爾離開家旅行 8 小時，他到達時是什麼時間呢？」這種練習是重要的，甚至中學生對這些問題的構思仍是有困難的，時間加減問題涉及有關小時、分鐘以及一天二個 12 小時的循環的瞭解。



在允許學生表現出他們是如何瞭解測量概念的開放式活動中，面積的測量需要蒐集有用的預估資料，傳統教科書測驗著重在規定、程序的技能諸如：從英呎到英吋的單位轉換或公式使用。檢測這些試驗項目，反問自己是

否測驗真實的告訴你所要知道的學生和測量。

聚焦於概念

當進行你的測量單位教學時，考慮什麼是學生在熟悉與發展一個任何屬性的測量時真正的需求。

學生瞭解測量的屬性要如何才做得好？觀察學生如何做比較活動（「哪個範圍最大的？你會如何表達？」）將告訴你必須知道的，要非常小心謹慎地指導學生，確定你觀察到的想法是他們的，而不是你的。不指示學生用你規定方法去測量某些事物，讓學生選擇他們自己的方法和解釋他們在做什麼和為什麼他們選擇這種方法，假如有道理，要求他們對相同物件的測量找到一種以上的方法。

學生瞭解測量工具的意義嗎？對直尺、量角器和時鐘經常是瞭解不足的，要求學生用直尺去找出二個不同的方法測量，或讓他們從別人身上學到使用技術。（「毛奎測量她的衣櫃寬度，她在一邊註記 10 公分，衣櫃的另一邊是標記 42 和 43 公分之間。毛奎是困惑的，沒有再測量衣櫃，你將如何幫助毛奎呢？」）另一個技巧是讓學生解釋直尺或量角器如何進行測量，去幫忙做說明，讓他們用標準工具比較學生自己做的工具，例如卡紙量角器。

標準單位

再次強調，危險的是傳統都只注意單位的轉換而非熟悉單位，考慮這二個作業：

1. 427 公分 = _____ 公尺
2. 用公分和公尺估計這條繩索的長度。你用什麼想法來協助你進行估計？

這兩個作業都與公分與公尺相關，第二個作業更需要學生熟悉單位，兒童要利用公尺一公分的關係還是進行二個個別的估計？如何形成估計？是用已經慣用的單位來熟悉標準嗎？當孩子們做第二個作業而不是第一個作業時，回想關於這些問題是有用的。如同所有估計一樣，這訊息能引導你的教學或形成估計目的。

公式

把數字套到公式，甚至需要學生熟記公式，對發展測量的瞭解確實非常有限，多花時間在公式概念的發展，少花時間在他們的使用練習。

文學的連結

多種關於巨人、奇幻境界和不常見的現象的想像書籍，促使對我們世界的測量進行比較，也有大量的測量「概念書」，設計來幫忙孩子們探測有趣的測量觀點。這裡選擇提供幾個例子：

一英尺有多大？《How Big Is a Foot?》（Myller, 1990）

在這本概念書的故事對小孩子是有吸引力的，國王用他的步幅量他的皇后（包括皇冠）和訂製床為 6 步長和 3 步寬。這木匠師傅的徒弟非常的嬌小，依照他的自己的步幅製作床，這問題引起了對標準單位的需求，但是孩子們也被激發針對不同的目的去使用他們自己的測量的方法，Lubinski 和 Thiessen（1996）顯示學生如何用連接和分割腳印的活動引導一年級學生去創造一支「直尺」。

吉姆和豆莖 《Jim and the Beanstalk》 (Briggs, 1970)

傑克與豌豆的經典故事改編，吉姆幫助很老的巨人。吉姆製作一個巨人尺寸的一對眼鏡，並測量巨人的假牙和一頂假髮，如第 15 章用扣子引起了比率概念的討論，在充滿這個故事的大東西裡，孩子們會好奇和討論這些巨大東西會有多大？

一個類似的故事是 Jonathan Swift 的名著：《格列佛遊記》(Gulliver's Travels) 一個四年級單元的標題「我與格列佛的旅行」(Education Development Center, 1991)，引導學生在格列佛的旅程中去創造圖畫及使用測量探測土地，這大人國的土地是在一個東西都比一般大十倍的地方。

法蘭克計算 《Counting on Frank》 (Clement, 1991)

法蘭克是一隻狗，和他的小主人——這故事的講述者，忙於日常事物測量：原子筆可以畫線的長度、房間內可容納法蘭克的數量，或是水龍頭沒關好而讓房間充滿水需要的時間，這些富於幻想的想法和極好笑的圖畫輕易地刺激學生去進行他們自己的估計，小孩子們對他們自己的想法可能沒辦法比猜測更好，三年級學生能調查他們的估計和真實是如何一致，這本書能引導孩子們去查長度、重量、體積、面積和時間，以及連接每個到他們的私人世界。「假如我用行李袋填滿我的房間，我估計它將花 3000 個袋子，這些袋子全部將會比 15,000 鎊還重，假如每個行李袋都像我爸爸的汽車那麼大，它們將會需要如同足球運動場那麼大的空間」。諸如此類的想法是想像的樂趣，也能由測試違反真實來達到測量和計算的目的。一個想法是去幫助教室同學都有他自己法蘭克這本書，並提供一個附錄解釋他們的估計。

8000 顆石頭 《8000 Stones》 (Wolkstein, 1972)

這是一個關於中國最高首長的有趣傳說，他希望找尋一個稱大象的方法，曹冲解答了這個問題，以把大象放在船上並在船身側面畫記水位，去產生和那個大象相同效果的重量總合。對中年級學生這是一很好的測量的間接方法介紹，不只能探索相同的稱重方法，而且學生能研究其他的測量法和找出它們是如何形成的。譬如，我們用水銀溫度計如何測量溫度？用有一個刻度盤的金屬片溫度計又該如何做呢？

本章的省思

書寫作業

1. 解釋測量事物的意義，你的說明對長度、面積、重量、體積和時間一樣有用嗎？
2. 一般測量的教學計畫有三部分，說明活動如何促使達成教學目標。
3. 五個理由說明使用非正式的單位代替標準單位在教學上的活動，哪個對你似乎是最重要的呢？為什麼？
4. 對每一個下列的屬性，描述一個比較活動；一至二個可能的非正式單位；和一個包括估計要素的小組活動：
 - (a) 長度。
 - (b) 面積。
 - (c) 體積。
 - (d) 重量。
 - (e) 容量。
5. 用直尺畫三角形、四邊形和五邊形，讓每個都像筆記本的紙張大小，

做一個蠟紙量角器，並測量每個內角，每個形狀的內角的和有接近預先的假設嗎？

6. 什麼是角度一度？你要如何幫助孩子們學習什麼是一度呢？
7. 關於標準單位，什麼是學生必須知道的呢？而這些當中，又哪個是最重要和最不重要的呢？
8. 發展一個相關的方法學習長方形、平行四邊形、三角形和不規則四邊形的面積公式，畫圖並提出說明來。
9. 解釋矩形直柱體的體積公式是如何有可能利用類似長方形的面積公式的方法去發展出來。
10. 解釋圓的面積公式是如何肯定能利用平行四邊形的基本面積公式求得（假如你有一套像派的小片，這些能被我們當作圓的部分）。
11. 在時間章節中描述時鐘閱讀教學的典型方法與單一指針討論方法的不同。

討論與探究作業

1. 製作你們自己非正式測量單位的測量工具，並使用你的工具去測量，然後以每個方法形成相同測量，會有什麼樣的價值和限制呢？你能看出所有孩子們做這兩種方法的重要性嗎？
2. 教科書通常在測量章節中長度、面積、體積和容量都涵蓋公制和習慣性單位，大都以很簡易方式處理這些題材。請找出一套教科用書，檢核是否包含本書中所述這些測量的想法？你如何修改或擴充課程去發現？
3. 閱讀在《三到六年級數學課程的蒐集》（*A Collection of Math Lessons from Grades 3 Through 6*）（Burns, 1987）第10章〈英尺的活動〉（Foot Activities），在課程活動中確知二個好的想法，修改活動成為適合你們自己需要的，並以一個班的孩子去試驗它。

推薦閱讀參考資料

1. Nitabach, E., & Lehrer, R. (1996). Developing spatial sense through area measurement. *Teaching Children Mathematics*, 2, 473-476.

這是一篇很好的文章，作者描述了 6 個測量的原則，提供空間注意事項協助面積測量，然後他們持續描述一、二年級某些好活動與兒童反應，我們太常用一些簡單的假設想法，這篇文章提供了真實觀點的基本研究。

2. Rubenstein, R. N., Lappan, G., Phillips, E., & Fitzgerald, W. M. (1993). Anglesense: A valuable connector. *Arithmetic Teacher*, 40, 352-358.

對中年級教師而言，這是一篇重要的文章，作者描述了一系列用樣式積木與角測量工具，對各種多邊形角的研究。其中很有趣的想法是討論一個問題：為什麼在一個圓裡有 360 度呢？並繼續圖解出多邊形內角問題。

3. Wilson, P. S., & Rowland, R. E. (1993). Teaching measurement. In R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp.171-194). Old Tappan, Nj: Macmillan.

在這篇好作品中對每個老師都有一個有趣的可研究想法來檢視課堂中的測量，所有的面積測量方法都以某些不同的兒童經驗被清楚的描述討論，章節中也包含了很多好活動。